

3連応力式による矩形板の固有振動解析について*

佐 渡 公 明**

能 町 純 雄***

(昭和46年9月29日受理)

On Free Vibration of a Rectangular Plate by Three-Stress Equation

by Kimiteru SADO and Sumio G. NOMACHI

The free vibration of a rectangular plate, especially with all edges free or clamped, has already been studied, because this is a very interesting characteristic value problem in the theory of elasticity.

A quite different method from previous studies is described in this paper. A plate is imagined to be divided into some numbers of strips (Finite Strip Method), and the deflection w_r and $M_r^* = -Nd^2w/dy^2$ on the nodal line r are regarded as unknown values. Then the equilibrium equation of the shearing force and the continuity equation of the slope (three-stress equation) on r are corresponding to w_r , M_r^* , and the frequency equation can be obtained assuming that the inertia force acts on every node as a line load.

The number of strips n and terms m which comes from Finite Fourier Transforms have influence on the accuracy of the quantity of natural frequency. Numerical results are as follows; we should take $n \geq 4$ in case of all edges simply supported rectangular plate in order to decrease error in less than 5%, $n \geq 5$ in case of the plate with two opposite edges simply supported and the other two clamped, $n \geq 4$ and $m \geq 6$ in case of all edges clamped square plate.

The rectangular plate with stepwise varying thickness in one direction and equi-thickness in another direction will also be treated by the same method for any boundary conditions.

1. ま え が き

矩形板の固有振動問題は四辺単純支持や、2つの相対する辺が単純支持され他の2つの辺が自由であるかあるいは固定されている矩形板については、たいした数学的困難もなく解ける。しかし、四辺が全部自由であるとか、あるいは固定されている矩形板の振動問題はかなり

* 土木学会第26回年次学術講演会，昭和46年10月，仙台にて一部発表

** 北見工業大学開発工学科

*** 室蘭工業大学土木工学科

複雑であり、弾性学において興味深い固有値問題であるので古くから研究されている。

四辺自由な矩形板に対しては、例えば、Ritz の方法^{1),2)}、井口の方法³⁾により解かれており四辺固定矩形板については、例えば Ritz の方法⁴⁾、Taylor の方法^{1),5)}、Timoshenko の方法⁶⁾がある。

したがってこの問題に関し論ずる必要はないようであるが、本論文では従来の方法と全く異なり、平板を一方向に帯板要素に分割し (Finite Strip Method)、帯板の境界 r 点における $M_r^* = -Nd^2w/dy^2$ とたわみ w_r を未知量とし、 M_r^* については境界上でのたわみ角の連続条件、すなわち3連応力式を取り、 w_r については境界 r 点に隣接する両帯板要素のせん断力の釣合いを取って振動数方程式を求めようとするものである。

この方法による平板の静的解析は、これまで室工大、能町研究室で種々なされている^{7),8)}。本方法による場合、分割数 n や有限フーリエ逆変換の項数 m の取り方が固有振動数の精度に影響してくるので、この問題を数値計算例として3つの境界条件の違った矩形板について調べた。

2. フーリエ定和分変換および逆変換公式

本論文で差分方程式の解法に応用するフーリエ定和分変換は、有限フーリエ変換を発展させたものであるが、その公式を以下に記す。詳細は参考文献9)参照のこと。

フーリエ定和分変換を次のように定義する。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{S}_i[f(x)] &= \sum_{x=1}^{n-1} f(x) \sin \frac{i\pi}{n} x \\ \mathbf{C}_i[f(x)] &= \sum_{x=1}^{n-1} f(x) \cos \frac{i\pi}{n} x \end{aligned} \right\} (2-1)$$

(2-1)式の逆変換はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{S}_i[f(x)] \sin \frac{i\pi}{n} x \\ f(x) &= \frac{2}{n} \sum_{i=0}^n \mathbf{R}_i[f(x)] \sin \frac{i\pi}{n} x \end{aligned} \right\} (2-2)$$

ここで

$$\mathbf{R}_0[f(x)] = \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{C}_0[f(x)] + \frac{1}{2} f(n) + \frac{1}{2} f(0) \right\}$$

$$\mathbf{R}_i[f(x)] = \mathbf{C}_i[f(x)] + \frac{(-1)^i}{2} f(n) + \frac{1}{2} f(0)$$

$$\mathbf{R}_n[f(x)] = \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{C}_n[f(x)] + \frac{(-1)^n}{2} f(n) + \frac{1}{2} f(0) \right\}$$

変1次差分、2次差分のフーリエ定和分変換公式は

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{S}_i[\mathcal{A}f(x)] &= -2 \sin \frac{i\pi}{n} \mathbf{R}_i[f(x)] \\ \mathbf{C}_i[\mathcal{A}f(x)] &= -(-1)^i \Delta f(n-1) - \Delta f(0) \\ &\quad + \left(1 + \cos \frac{i\pi}{n}\right) \left\{(-1)^i f(n) - f(0)\right\} + 2 \sin \frac{i\pi}{n} \mathbf{S}_i[f(x)] \end{aligned} \right\} \quad (2-3)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{S}_i[\mathcal{A}^2 f(x-1)] &= -\sin \frac{i\pi}{n} \left\{(-1)^i f(n) - f(0)\right\} - D_i \mathbf{S}_i[f(x)] \\ \mathbf{C}_i[\mathcal{A}^2 f(x-1)] &= (-1)^i \Delta f(n-1) - \Delta f(0) - D_i \mathbf{R}_i[f(x)] \end{aligned} \right\} \quad (2-4)$$

ただし

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= f(x+1) - f(x) \\ \mathcal{A}f(x) &= f(x+1) - f(x-1) \\ D_i &= 2 \left(1 - \cos \frac{i\pi}{n}\right) \end{aligned}$$

3. 3 連応力式とせん断力の釣合い式

図-1 のように座標軸 x, y を平板の辺に沿って取り, y 方向に n 枚の帯板要素に分割する。

帯板の境界 r 点でのたわみ角の連続条件 $\theta_{r,r-1} = \theta_{r,r+1}$

すなわち 3 連応力式は (3-1) 式で表わされる。この式の誘導については参考文献 7) 参照のこと。

$$\frac{w_{r-1} - 2w_r + w_{r+1}}{\lambda} + \frac{\lambda}{6N} (M_{r-1}^* + 4M_r^* + M_{r+1}^*) = 0 \quad (3-1)$$

$$M_r^* = -N \left. \frac{d^2 w}{dy^2} \right|_r \quad N = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

ここで, E : 弾性係数, h : 板厚, ν : ポアソン比, N : 板の曲げ剛性, w_r : 境界 r 点のたわみ, λ : 分割区間長である。

境界 r 点に作用する荷重を P_r で表わし, r 点に隣接する両帯板要素のせん断力の釣合い式 $Q_{r,r+1} - Q_{r,r-1} + P_r = 0$ は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \frac{M_{r-1}^* - 2M_r^* + M_{r+1}^*}{\lambda} - \frac{N}{\lambda} (\ddot{w}_{r-1} - 2\ddot{w}_r + \ddot{w}_{r+1}) \\ + \frac{\lambda}{6} (\dot{M}_{r-1}^* + 4\dot{M}_r^* + \dot{M}_{r+1}^*) - \frac{\lambda N}{6} (\ddot{w}_{r-1} + 4\ddot{w}_r + \ddot{w}_{r+1}) + P_r = 0 \end{aligned} \quad (3-2)$$

(3-2) 式を差分式で表わし, ダランベールの原理により P_r を慣性力 $-(\gamma h \lambda / g) (\partial^2 w_{r,t} / \partial t^2)$ で置き換えると

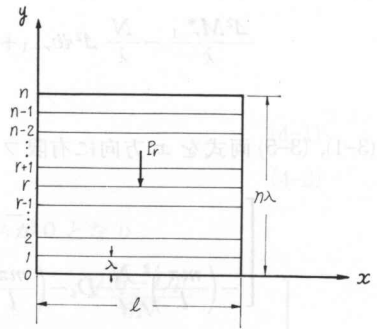


図-1 帯板要素と座標軸
Fig. 1. Division into strips and axis of coordinates

注1) 平板の曲げモーメントは M_r^* を使えば $M_y = M_r^*(x) - N\nu\ddot{w}_r(x)$, $M_x = \nu M_r^*(x) - N\ddot{w}_r(x)$ である。

$$\frac{D^2 M_{r-1,t}^*}{\lambda} - \frac{N}{\lambda} D^2 \ddot{w}_{r-1,t} + \frac{\lambda}{6} (D^2 \dot{M}_{r-1,t}^* + 6 \dot{M}_{r,t}^*) - \frac{\lambda N}{6} (D^2 \ddot{w}_{r-1,t} + 6 \ddot{w}_{r,t}) - \frac{\gamma h \lambda}{g} \ddot{w}_{r,t} = 0 \quad (3-3)$$

ここで記号 $\ddot{}$ および $\dot{}$ はそれぞれ x および時間 t についての 2 回微分を表わす。

正規型の振動を仮定して

$$w_{r,t} = w_r \sin pt \quad M_{r,t}^* = M_r^* \sin pt \quad (3-4)$$

とおくと (3-3) 式は

$$\frac{D^2 M_{r-1}^*}{\lambda} - \frac{N}{\lambda} D^2 \ddot{w}_{r-1} + \frac{\lambda}{6} (D^2 \dot{M}_{r-1}^* + 6 \dot{M}_r^*) - \frac{\lambda N}{6} (D^2 \ddot{w}_{r-1} + 6 \ddot{w}_r) + \frac{\gamma h \lambda}{g} p^2 w_r = 0 \quad (3-5)$$

(3-1), (3-5) 両式を x 方向に有限フーリエ変換, y 方向にフーリエ定和分変換をすると

$$\left[\begin{array}{cc} -\frac{D_\ell}{\lambda} & \frac{\lambda(6-D_\ell)}{6N} \\ -\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \frac{N}{\lambda} D_\ell - \left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 \frac{\lambda N}{6} (6-D_\ell) + \frac{\gamma h \lambda}{g} p^2 & -\frac{D_\ell}{\lambda} - \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \frac{\lambda}{6} (6-D_\ell) \end{array} \right] \times \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S}_\ell[\bar{w}_{r,m}] \\ \mathbf{S}_\ell[\bar{M}_{r,m}^*] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\lambda}{6N} \alpha_\ell \sin \frac{i\pi}{n} \bar{M}_0^* \\ A \end{array} \right\} \quad (3-6)$$

$$A = \left\{ \frac{1}{\lambda} - \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \frac{\lambda}{6} \right\} \alpha_\ell \bar{M}_0^* \sin \frac{i\pi}{n} + \left\{ \frac{1}{\lambda} - \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \frac{\lambda}{6} \right\} \left(\frac{m\pi}{l}\right) \alpha_\ell \beta_m N \sin \frac{i\pi}{n} w_0 \Big|_{x=0} \\ + \left\{ \frac{D_\ell}{\lambda} + \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \frac{\lambda(6-D_\ell)}{6} \right\} \left(\frac{m\pi}{l}\right) \beta_m N \mathbf{S}_\ell[\tau w_r]_{x=0} \\ + \left\{ \frac{1}{\lambda} - \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \frac{\lambda}{6} \right\} \left(\frac{m\pi}{l}\right) \alpha_\ell N \sin \frac{i\pi}{n} \bar{w}_0 \\ + \left(\frac{m\pi}{l}\right) \frac{\beta_m \lambda}{6} \left\{ \alpha_\ell \sin \frac{i\pi}{n} (N \ddot{w}_0 - M_0^*)_{x=0} - (6-D_\ell) \mathbf{S}_\ell[(N \ddot{w}_r - M_r^*)_{x=0}] \right\}$$

ここで

$$\alpha_\ell = \begin{cases} (-1)^\ell - 1 & \text{for } y \text{ 方向の振動が対称振動} \\ -(-1)^\ell - 1 & \text{for } y \text{ 方向の振動が逆対称振動} \end{cases} \quad (3-7)$$

$$\beta_m = \begin{cases} (-1)^m - 1 & \text{for } x \text{ 方向の振動が対称振動} \\ -(-1)^m - 1 & \text{for } x \text{ 方向の振動が逆対称振動} \end{cases} \quad (3-8)$$

$\bar{w}_{r,m}$ は次式のように x 方向に有限フーリエ変換したことを表わす。

$$\bar{w}_{r,m} = \int_0^l w_r \sin \frac{m\pi}{l} x dx \quad (3-9)$$

この逆変換は

$$w_r = \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \bar{w}_{r,m} \sin \frac{m\pi}{l} x \quad (3-10)$$

$\bar{w}_{r,m}$ をフーリエ定和分逆変換より求めて

$$w_r = \frac{2}{l} \frac{2}{n} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{n-1} \mathbf{S}_\ell [\bar{w}_{r,m}] \sin \frac{i\pi}{n} r \sin \frac{m\pi}{l} x \quad (3-11)$$

(3-6) 式は境界値を残したままなので全ての境界条件の矩形板に適用できる一般式である。

4. 矩形板の振動数方程式

4.1 四辺単純支持矩形板の振動数方程式

この場合の境界条件は、

$$w_r)_{x=0} = w_r)_{x=l} = 0 \quad \ddot{w}_r)_{x=0} = \ddot{w}_r)_{x=l} = 0 \quad (4-1)$$

$$w_0 = w_n = 0 \quad M_0^* = M_n^* = 0 \quad (4-2)$$

この境界条件を(3-6)式に代入すると、右辺の列マトリックスが0となり

$$\left[\begin{array}{cc} -\frac{D_i}{\lambda} & \frac{\lambda(6-D_i)}{6N} \\ -\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \frac{N}{\lambda} D_i - \left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 \frac{\lambda N}{6} (6-D_i) + \frac{\gamma h \lambda}{g} p^2 & -\frac{D_i}{\lambda} - \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \frac{\lambda}{6} (6-D_i) \end{array} \right] \times \begin{Bmatrix} \mathbf{S}_\ell [\bar{w}_{r,m}] \\ \mathbf{S}_\ell [\bar{M}_{r,m}^*] \end{Bmatrix} = 0 \quad (4-3)$$

振動中 $\mathbf{S}_\ell [\bar{w}_{r,m}] \neq 0$, $\mathbf{S}_\ell [\bar{M}_{r,m}^*] \neq 0$ であるから、

$$\left| \begin{array}{cc} -\frac{D_i}{\lambda} & \frac{\lambda(6-D_i)}{6N} \\ -\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \frac{N}{\lambda} D_i - \left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 \frac{\lambda N}{6} (6-D_i) + \frac{\gamma h \lambda}{g} p^2 & -\frac{D_i}{\lambda} - \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \frac{\lambda}{6} (6-D_i) \end{array} \right| = 0 \quad (4-4)$$

よって固有円振動数 p は、矩形板の辺の比を $l/n\lambda = \xi$ とすると

$$p_{i,m}(n, \xi) = \sqrt{6n^2 \left(\frac{n^2 D_i^2}{(6-D_i) \pi^4} + \frac{m^2 D_i}{3\pi^2 \xi^2} + \frac{m^4 (6-D_i)}{36n^2 \xi^4} \right) \frac{\pi^2}{(n\lambda)^2} \sqrt{\frac{gN}{\gamma h}}} \quad (4-5)$$

厳密解は

$$p_{i,m}(\xi) = \left(i^2 + \frac{m^2}{\xi^2} \right) \frac{\pi^2}{(n\lambda)^2} \sqrt{\frac{gN}{\gamma h}} \quad (4-6)$$

i, m はそれぞれ y, x 方向の振動次数を表わす。

4.2 相対する2辺が単純支持、他の相対する2辺が固定支持矩形板の振動数方程式

(1) $x=0, l$ で単純支持, $y=0, n\lambda$ で固定支持の場合

境界条件は

$$\omega_r)_{x=0} = \omega_r)_{x=l} = 0 \quad \dot{\omega}_r)_{x=0} = \dot{\omega}_r)_{x=l} = 0 \quad (4-7)$$

$$\omega_0 = \omega_n = 0 \quad \left. \frac{\partial \omega}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial \omega}{\partial y} \right|_{y=n\lambda} = 0 \quad (4-8)$$

(4-7) 式と (4-8) の第 1 式を (3-6) 式に代入して (今後簡単のため (3-6) 式の左辺の係数マトリックスを \mathbf{A} で表わす。)

$$\mathbf{A} \begin{Bmatrix} \mathbf{S}_i[\bar{w}_{r,m}] \\ \mathbf{S}_i[\bar{M}_{r,m}^*] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\lambda}{6N} \alpha_i \sin \frac{i\pi}{n} \bar{M}_0^* \\ \left\{ \frac{1}{\lambda} - \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \frac{\lambda}{6} \right\} \alpha_i \sin \frac{i\pi}{n} \bar{M}_0^* \end{Bmatrix} \quad (4-9)$$

(4-8) 式の第 2 の境界条件式 $\partial \omega / \partial y|_{y=0} = 0$ は

$$\frac{\omega_1}{\lambda} + \frac{(2M_0^* + M_1^*)}{6N} \lambda = 0 \quad (4-10)$$

これを x 方向に有限フーリエ変換して

$$\frac{\bar{w}_{1,m}}{\lambda} + \frac{(2\bar{M}_{0,m}^* + \bar{M}_{1,m}^*)}{6N} \lambda = 0 \quad (4-11)$$

(4-9) 式を解いてフーリエ定和分逆変換公式 (2-2) より $\bar{w}_{1,m}$, $\bar{M}_{1,m}^*$ を求め (4-11) 式に代入すると次の振動数方程が得られる。

$$\frac{\lambda}{3} - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i}{D_{im}} \left[\frac{1}{\lambda} + \frac{\lambda}{6} \left\{ \frac{D_i}{\lambda^2} - \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \frac{D_i}{3} - \left(\frac{m\pi}{l} \right)^4 \frac{\lambda^2(6-D_i)}{36} + \omega^2 \right\} \sin^2 \frac{i\pi}{n} \right] = 0 \quad (4-12)$$

$$D_{im} = \left(\frac{D_i}{\lambda} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \frac{D_i(6-D_i)}{3} + \left(\frac{m\pi}{l} \right)^4 \frac{\lambda^2(6-D_i)}{36} - \omega^2(6-D_i) \quad (4-13)$$

$$\omega^2 = \frac{\gamma h \lambda^2}{6gN} p^2$$

ここで m は x 方向の振動次数を表わし, y 方向の振動次数については α_i で規制され固有値 ω^2 の大小より判別できる。

(2) $x=0, l$ で固定支持, $y=0, n\lambda$ で単純支持の場合

境界条件は,

$$\omega_r)_{x=0} = \omega_r)_{x=l} = 0 \quad \dot{\omega}_r)_{x=0} = \dot{\omega}_r)_{x=l} = 0 \quad (4-14)$$

$$\omega_0 = \omega_n = 0 \quad M_0^* = M_n^* = 0 \quad (4-15)$$

(4-14) の第 1 式と (4-15) 式を (3-16) 式に代入して

$$\mathbf{A} \begin{Bmatrix} \mathbf{S}_i[\bar{w}_{r,m}] \\ \mathbf{S}_i[\bar{M}_{r,m}^*] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{\lambda N}{6} \beta_m \left(\frac{m\pi}{l} \right) (6-D_i) \mathbf{S}_i[\ddot{w}_{rx=0}] \end{Bmatrix} \quad (4-16)$$

(4-14) 式の第 2 式は (3-11) 式より変形して

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{m\pi}{l} \right) \mathbf{S}_i [\bar{w}_{r,m}] \sin \frac{i\pi}{n} r = 0 \quad (4-17)$$

(4-16) 式より $\mathbf{S}_i [\bar{w}_{r,m}]$ を求め、(4-17) 式を特に i 番目について考えると

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m\pi}{l} \right) \mathbf{S}_i [\bar{w}_{r,m}] = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \frac{\beta_m}{\Delta_{im}} \mathbf{S}_i [\ddot{w}_{rx=0}] = 0 \quad (4-18)$$

振動中 $\mathbf{S}_i [\ddot{w}_{rx=0}] \neq 0$ であるから次の振動数方程式が得られる。

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2 \beta_m}{\Delta_{im}} = 0 \quad (4-19)$$

Δ_{im} は (4-13) 式である。ここで i は y 方向の振動次数を表わし、 β_m は (3-8) 式である。

4.3 四辺固定矩形板の振動数方程式

この場合、境界条件は (4-8), (4-14) 両式である。(4-8), (4-14) 両式の第 1 式を (3-16) 式に代入して

$$\mathbf{A} \begin{Bmatrix} \mathbf{S}_i [\bar{w}_{r,m}] \\ \mathbf{S}_i [\bar{M}_{r,m}^*] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\lambda}{6N} \alpha_i \sin \frac{i\pi}{n} \bar{M}_0^* \\ \left\{ \frac{1}{\lambda} - \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \frac{\lambda}{6} \right\} \alpha_i \sin \frac{i\pi}{n} \bar{M}_0^* - \frac{(6-D_i)}{6} \lambda N \beta_m \left(\frac{m\pi}{l} \right) \mathbf{S}_i [\ddot{w}_{rx=0}] \end{Bmatrix} \quad (4-20)$$

4.2 の (1) と同様 (4-20) 式を解いて、 $y=0$ でのたわみ角 $=0$ の条件式 (4-11) より

$$\left\{ \frac{\lambda}{3} - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i}{\Delta_{im}} \left[\frac{1}{\lambda} + \frac{\lambda}{6} \left\{ \frac{D_i}{\lambda^2} - \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \frac{D_i}{3} - \left(\frac{m\pi}{l} \right)^4 \frac{\lambda^2 (6-D_i)}{36} + \omega^2 \right\} \right] \sin^2 \frac{i\pi}{n} \right\} \bar{M}_0^* + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda N \beta_m}{\Delta_{im}} \left(\frac{m\pi}{l} \right) \frac{(6-D_i)}{6} \sin \frac{i\pi}{n} \mathbf{S}_i [\ddot{w}_{rx=0}] = 0 \quad (4-21)$$

他方 $x=0$ におけるたわみ角 $=0$ の条件式 (4-18) に (4-20) 式の解を代入して

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left\{ - \left(\frac{m\pi}{l} \right) \frac{\alpha_i}{\Delta_{im} N} \sin \frac{i\pi}{n} \bar{M}_0^* + \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \frac{\lambda^2 (6-D_i)}{36 \Delta_{im}} \beta_m \mathbf{S}_i [\ddot{w}_{rx=0}] \right\} = 0 \quad (4-22)$$

(4-21) 式の \bar{M}_0^* の係数を A_m で表わし、さらに i を j と書き改めて ((4-22) 式の i と区別するため) \bar{M}_0^* を求め (4-22) 式に代入すると

$$\frac{\alpha_j}{n} \sin \frac{j\pi}{n} \sum_{i=1}^{n-1} (6-D_j) \sin \frac{j\pi}{n} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2 \beta_m}{A_m \Delta_{im} \Delta_{jm}} \mathbf{S}_j [\ddot{w}_{rx=0}] + \frac{\lambda (6-D_j)^2}{12} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2 \beta_m}{\Delta_{im}} \mathbf{S}_i [\ddot{w}_{rx=0}] = 0 \quad (4-23)$$

この式を簡略して

$$\sum_{j=1}^{n-1} \gamma_{ij} \mathbf{S}_j [\ddot{w}_{rx=0}] + \delta_i \mathbf{S}_i [\ddot{w}_{rx=0}] = 0 \quad (4-24)$$

これを $i=1, 2, \dots, n-1$ の各場合に展開すると

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} + \delta_1 & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1,n-1} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} + \delta_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \gamma_{n-1,1} & \cdots & \cdots & \gamma_{n-1,n-1} + \delta_{n-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{S}_1[\dot{w}_{rx=0}] \\ \mathbf{S}_2[\dot{w}_{rx=0}] \\ \vdots \\ \mathbf{S}_{n-1}[\dot{w}_{rx=0}] \end{Bmatrix} = 0 \tag{4-25}$$

すなわち

$$\begin{aligned} [\gamma_{ij}] \{ \mathbf{S}_i[\dot{w}_{rx=0}] \} &= 0 \tag{4-26} \\ i, j &= 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned}$$

振動中 $\mathbf{S}_i[\dot{w}_{rx=0}] \neq 0$ であるから、次の振動数方程式が得られる。

$$\text{Det} [\gamma_{ij}] = 0 \tag{4-27}$$

ここに γ_{ij} は

$i \neq j$ のとき

$$\gamma_{ij} = \frac{\alpha_i}{n} (6 - D_j) \sin \frac{i\pi}{n} \sin \frac{j\pi}{n} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2 \beta_m}{A_m \Delta_{im} \Delta_{jm}} \tag{4-28}$$

$$A_m = \frac{\lambda}{3} - \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k}{\Delta_{km}} \left[\frac{1}{\lambda} + \frac{\lambda}{6} \left\{ \frac{D_k}{\lambda^2} - \left(\frac{m\pi}{l} \right) \frac{D_k}{3} - \left(\frac{m\pi}{l} \right)^4 \frac{\lambda^2 (6 - D_k)}{36} + \omega^2 \right\} \right] \sin^2 \frac{k\pi}{n}$$

$i = j$ のとき

$$\gamma_{ij} \equiv \gamma_{ii} + \delta_i = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2 \beta_m (6 - D_i)}{\Delta_{im}} \left\{ \frac{\alpha_i}{n} \frac{\sin^2 \frac{i\pi}{n}}{A_m \Delta_{im}} + \frac{\lambda (6 - D_i)}{12} \right\} \tag{4-29}$$

Δ_{im} , α_i , β_m はそれぞれ (4-13), (3-7), (3-8) 式の通りである。ここでは i, m はもはや振動次数を表わさない。

なお y 方向が対称振動の場合 i が偶数のとき $\alpha_i = 0$ となるので振動数方程式 (4-27) は次式となる。

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} + \delta_1 & \gamma_{13} & \cdots & \gamma_{1,n-1} \\ \gamma_{31} & \gamma_{33} + \delta_3 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \gamma_{n-1,1} & \cdots & \cdots & \gamma_{n-1,n-1} + \delta_{n-1} \end{bmatrix} = 0 \quad n-1: \text{奇数} \tag{4-30}$$

同様に y 方向が逆対称振動の場合は

$$\begin{bmatrix} \gamma_{22} + \delta_2 & \gamma_{24} & \cdots & \gamma_{2,n-1} \\ \gamma_{42} & \gamma_{44} + \delta_4 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \gamma_{n-1,2} & \cdots & \cdots & \gamma_{n-1,n-1} + \delta_{n-1} \end{bmatrix} = 0 \quad n-1: \text{偶数} \tag{4-31}$$

なお y 方向に h が階段状に変化する変断面矩形板の場合、3 連応力式 (3-1) は

$$\begin{aligned} \frac{w_{r-1}}{\lambda_r} - \left(\frac{1}{\lambda_r} + \frac{1}{\lambda_{r+1}} \right) w_r + \frac{w_{r+1}}{\lambda_{r+1}} \\ + \frac{1}{6} \left\{ \frac{\lambda_r}{N_r} M_{r-1}^* + 2 \left(\frac{\lambda_r}{N_r} + \frac{\lambda_{r+1}}{N_{r+1}} \right) M_r^* + \frac{\lambda_{r+1}}{N_{r+1}} M_{r+1}^* \right\} = 0 \end{aligned} \tag{4-32}$$

他方せん断力の釣合い式 (3-5) は

$$\begin{aligned} & \frac{M_{r-1}^*}{\lambda_r} - \left(\frac{1}{\lambda_r} + \frac{1}{\lambda_{r+1}} \right) M_r^* + \frac{M_{r+1}^*}{\lambda_{r+1}} - \left\{ \frac{N_r}{\lambda_r} \ddot{w}_{r-1} - \left(\frac{N_r}{\lambda_r} + \frac{N_{r+1}}{\lambda_{r+1}} \right) \ddot{w}_r + \frac{N_{r+1}}{\lambda_{r+1}} \ddot{w}_{r+1} \right\} \\ & + \frac{1}{6} \left\{ \lambda_r \dot{M}_{r-1}^* + 2(\lambda_r + \lambda_{r+1}) \dot{M}_r^* + \lambda_{r+1} \dot{M}_{r+1}^* \right\} \\ & - \frac{1}{6} \left\{ \lambda_r N_r \ddot{w}_{r-1} + 2(\lambda_r N_r + \lambda_{r+1} N_{r+1}) \ddot{w}_r + \lambda_{r+1} N_{r+1} \ddot{w}_{r+1} \right\} \\ & + \frac{\gamma h_r}{g} \left(\frac{\lambda_r + \lambda_{r+1}}{2} \right) \rho^2 \omega_r = 0 \end{aligned} \tag{4-33}$$

となるので両式を x 方向に有限フーリエ変換して $\bar{w}_{r,m}$ と $\bar{M}_{r,m}^*$ の列ベクトルの形にマトリックス表示し, どちらかの列ベクトルを消去すれば振動数方程式が得られる。

5. 数値計算例と考察

四辺単純支持矩形板において, 辺比 ξ を 0 から ∞ まで変化させたとき, 分割数 n に対する基本振動数の精度を図-2 に示す。 n や ξ の増加はたわみ曲面の連続性に近づくことを意味するので当然ながら精度の良くなることが分かる。 $\xi = \infty$ の場合は, はりの計算値に一致する。四辺単純支持正方形板の高次固有円振動数 p が n の増加するにしたがい厳密解に収束していく様子を 図-3 に示す。このとき振動モード $1/2$ と $2/1$, $1/3$ と $3/1$, $2/3$ と $3/2$ は n が増加すると

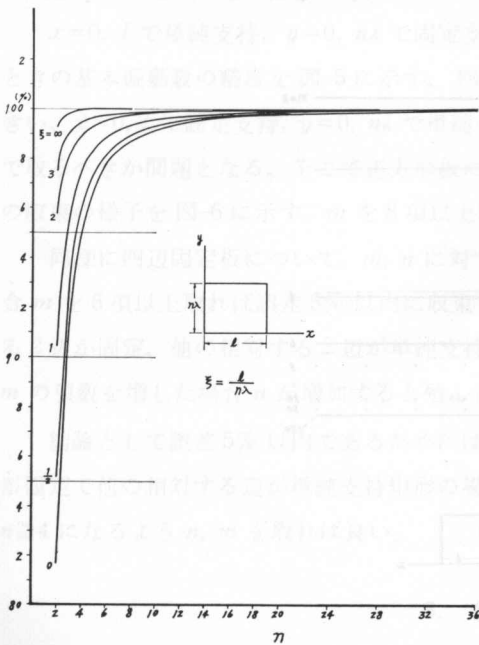


図-2 四辺単純支持矩形板の基本振動数の精度
Fig. 2. The accuracy of the lowest natural frequency for a simply supported rectangular plate

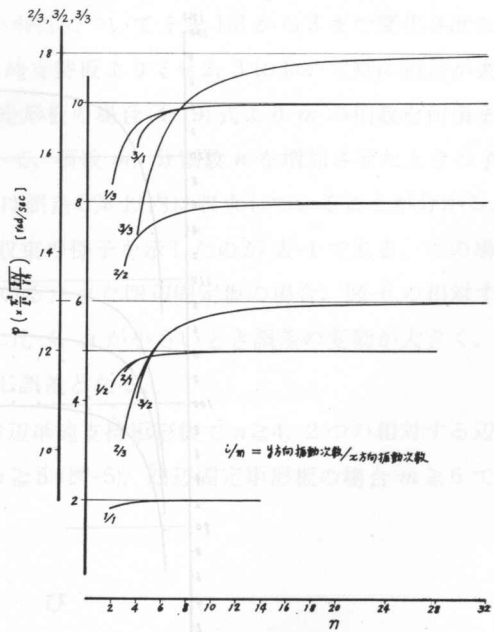


図-3 四辺単純支持正方形板の高次固有円振動数
Fig. 3. Values $p_{\delta,m}$ for a simply supported square plate

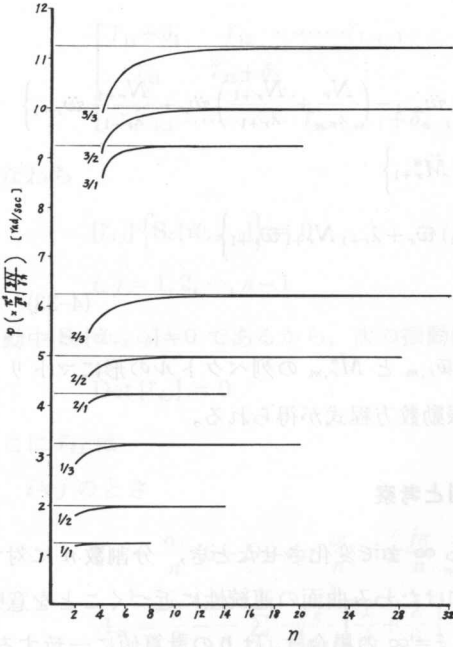


図-4 四辺単純支持矩形板 ($\xi=2$) の
高次固有円振動数

Fig. 4. Values $p_{i,m}$ for a simply supported rectangular plate ($\xi=2$)

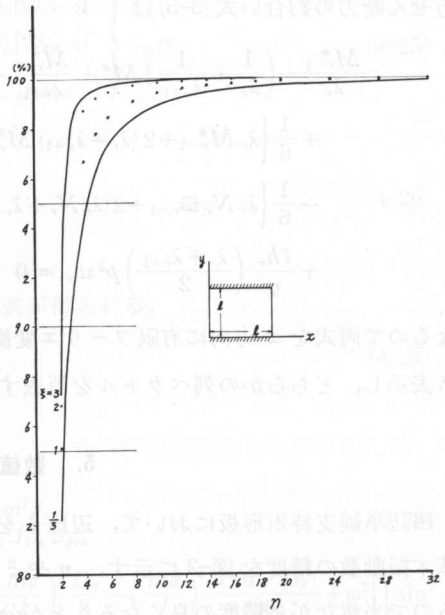


図-5 $x=0, l$ で単純支持, $y=0, l$ で固定支持
正方形板の基本振動数の精度

Fig. 5. The accuracy of the lowest natural frequency for an illustrated plate

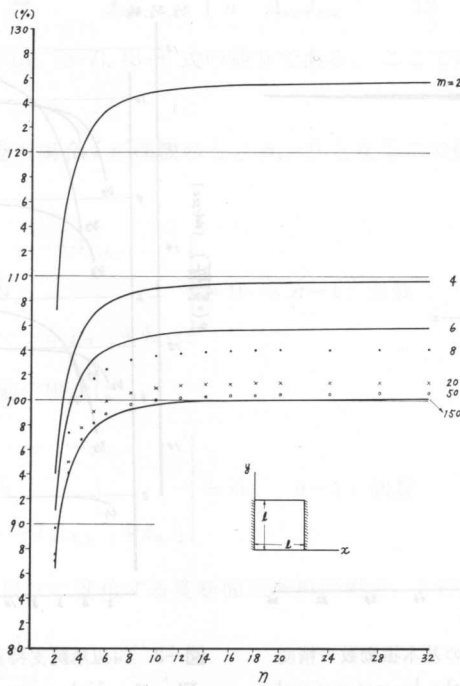


図-6 $x=0, l$ で固定支持, $y=0, l$ で単純支持正方形板の基本振動数の精度

Fig. 6. The accuracy of the lowest natural frequency for an illustrated plate

表-1 四辺固定正方形板の基本振動数の精度 (%)

Table 1. The accuracy of the lowest natural frequency for a square plate with all edges clamped

n	m							
	2	4	6	8	20	50	100	200
2	86.21	76.30	73.93	72.88	71.18	70.56	70.36	70.26
4	112.5	101.9	99.54	98.49	97.01	96.72	96.61	96.49
8	116.5	105.3	102.8	101.7	100.2	99.83	99.66	99.52
14	117.7	106.2	103.7	102.4	100.7	100.1	100.0	99.95
20	117.8	106.4	104.0	102.5	101.0	100.3	100.1	100.1
26	117.9	106.5	104.1	102.6	101.1	100.4	100.2	100.1
32	118.0	106.6	104.2	102.6	101.1	100.4	100.2	100.1

一致する。これは等断面正方形板で支持条件が四辺共同じときに生ずる現象で、いわゆる固有振動数の縮退である。また同じ分割数であれば $1/2$ と $2/1$ では $1/2$ の方が、 $2/3$ と $3/2$ では $2/3$ の方が……精度は良い。これは同じ n に対し、例えば、1次振動の方が2次振動に比較し \sin curve の1つの山を倍の点で近似しているからである。

図-4に示したように、長方形では縮退は生じない。

以下の計算例は全て $E=2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $\gamma=7.85 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$, $h=4 \text{ cm}$, $l=2 \text{ m}$, $\nu=0.3$ なる矩形板を取り挙げて計算した。厳密解は参考文献10)によった。

$x=0, l$ で単純支持, $y=0, n\lambda$ で固定支持矩形板について ξ を $1/3$ から3まで変化させたときの基本振動数の精度を図-5に示す。四辺単純支持板より $\xi=2, 3$ において特に誤差が大きい。 $x=0, l$ で固定支持, $y=0, n\lambda$ で単純支持矩形板の場合(4-19)式より m の項数を何項まで取るべきか問題となる。そこで正方形板について、項数 m , 分割数 n を増加させたときの p の収束の様子を図-6に示す。 m を8項以上取れば誤差5%以内に収束していることが分かる。

同様に四辺固定板について、 m, n に対する収束の様子を示したのが表-1である。この場合 m を6項以上取れば誤差5%以内に収束している。また四辺固定板の場合、図-6の相対する2辺が固定、他の相対する2辺が単純支持板に比べ、 n が小さいとき誤差の変動が大きく、 m の項数を増した場合 n が増加すると殆んど同じ誤差となる。

結論として誤差5%以内であるためには、四辺単純支持矩形板で $n \geq 4$, 2つの相対する辺が固定で他の相対する辺が単純支持矩形の場合 $n \geq 5$ (図-5), 四辺固定矩形板の場合 $m \geq 6$ で $n \geq 4$ になるよう n, m を取れば良い。

6. 結 び

以上の計算は全て北大、大型計算機センターの FACOM 230-60 を使って FORTRAN で行なったのであるが、固有値を求める通常のライブラリーが使えず、Determinant の符号が変わる値を逐次計算で求めていく方法を取ったが時間がかかりすぎるのでこれを改良して行きた

い。なお、機会をあらためて実験を行ない、理論値と比較検討したいと考えている。

参 考 文 献

- 1) 日高孝次：数値積分法，208-211 (昭23-7)，岩波書店。
- 2) チモシェンコ S.：工業振動学，405-406 (1969)，東京図書。
- 3) 井口鹿象：自由辺を有する長方形板の固定振動とその節線図について，応用物理，**10**-7，316-326 (昭16-7)。
- 4) 幅田吉衛：周辺を固定せる矩形薄板の固有振動，機械学会論文集，**13**-44，67-83 (昭22-5)。
- 5) Tomotitika, S.：On the Transverse Vibration of a Plate with Four Clamped Edges，東大航空研究所報告，129，301-323 (昭10-9)。
- 6) 成岡昌夫：四辺固定長方形板の横振動について，機械学会論文集，**17**-57，26-30 (昭26-4)。
- 7) 能町・松岡・堀米：帯板を要素とする応力解析法—平板について—，土木学会道支部研究発表会論文集，26，147-151 (昭45-2)。
- 8) 能町・松岡・堀米：帯板を要素とする平板の解法について，土木学会第25回講演会講演集，287-290 (昭45-11)。
- 9) Nomachi, S. G.：A Note on Fouriea Transtforms Concerning Finite Integration, *Trans. Mem. of MIT*, **5**-2, 711-718 (1966-8)。
- 10) 林 毅：軽構造の理論とその応用 (上)，423-425 (1969-4)，日科技連出版社。