

# 3連応力式をフレキシビリティとする ディスクリートの振動モデルについて\*

佐 渡 公 明\*\*

能 町 純 雄\*\*\*

(昭和46年9月29日受理)

## On the Discrete Vibration Model with Three- Stress Equation for Flexibility

by Kimiteru SADO and Sumio G. NOMACHI

For calculating the natural frequency of a structure, it is convenient to substitute a discrete vibration model for the structure under consideration. The object of this paper is first to show the accuracy of the natural frequency for a straight beam, when the three-stress equation is taken as flexibility of the discrete vibration model. Secondly the coupled vibration of the beam is also treated by the same method.

The three-stress equation coincides with the three-moment equation for the bending vibration and with the compatibility equation of the rotational angle for the torsion bending vibration.

The bending moment  $M_r$  and the deflection  $y_r$  on the nodal point  $r$  are unknown values for the bending vibration, and the torsion bending moment  $B_r$  and the rotational angle  $\theta_r$  are for the torsion bending vibration. The equilibrium equation of the shearing force and the torsion bending moment at  $r$ , and two three-stress equations in which the inertia force and the inertia torque are put as equivalent concentrated ones at the node are corresponding to the four unknown values  $y_r$ ,  $\theta_r$ ,  $M_r$  and  $B_r$ , thus the natural frequency can be found from the matrix of the coefficients.

Numerical results are as follows:

- (1) The method of the three-stress equation gives more accurate value than the method of the finite difference equation for  $M = -EI\ddot{y}$  or  $B = -EC_w\ddot{\theta}$ .
- (2) When the radius of curvature  $R$  increases in the curved beam, the effect of the bending vibration increases and that of the torsion bending one inversely decreases.

### 1. ま え が き

橋梁その他構造物の形状が複雑な場合に、構造物の固有振動解析は、力学的に等価な有限

\* 土木学会第25回年次学術講演会，昭和45年11月，大阪及び土木学会北海道研究発表会，昭和46年2月，札幌にて一部発表。

\*\* 北見工業大学開発工学科

\*\*\* 室蘭工業大学土木工学科

自由度のディスクリートな振動モデルに単純化して取扱うのが便利である。

本論文は、その際、3連応力式をフレキシビリティ（弾性性状）とする方法により精度の良い固有振動解析ができることを直げたについて示し、次にこの方法を曲率半径  $R$  が任意に変化する変断面曲線げたに適用したものである。

ここで3連応力式とは、曲げに対しては、たわみ角の連続条件である3連モーメント式を、曲げねじりに対しては、ねじれ角が微分的に連続しているという条件式を総括して名付けたものである。

解析の大要は、曲げ振動に対して各分割点のたわみ  $y_r$  と曲げモーメント  $M_r$  を未知量とし、曲げねじり振動に対して、ねじれ角  $\theta_r$  と曲げねじりモーメント  $B_r$  を未知量とし、 $y_r, \theta_r$  についてはそれぞれ  $r$  点の両区画部分のせん断力の釣合い及びねじりモーメントの釣合いを取り、 $M_r, B_r$  については3連応力式を用い、慣性力及び慣性トルクが各分割点に集中して作用すると仮定して固有値、固有ベクトルを求めるのである。

連成振動の場合は、慣性力及び慣性トルクの取り方に注意すれば全く同様に解析できる。最後に数値計算例をもって本解析法が精度的に優れていること、曲線げたの固有振動数に及ぼす  $R$  の影響、3区間連続曲線げたの固有振動数計算例を示す。

## 2. 変断面直げたの固有振動解析

任意の直げたの座標軸を図-1のように取り、けたを  $n$  分割して以下に示す記号を使用する。

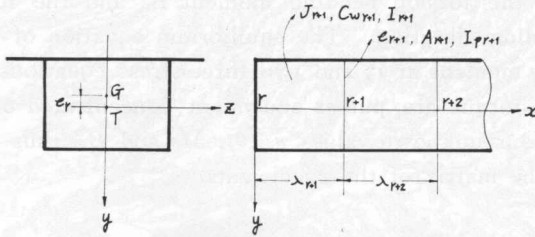


図-1 座標系と断面諸元

Fig. 1. Axis of coordinates and cross sectional quantities.

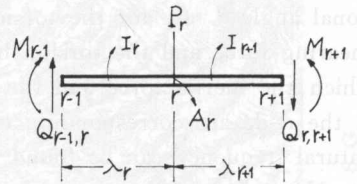


図-2 分割点  $r$  の両区画部分の断面力

Fig. 2. Internal forces of two adjacent elements to  $r$ .

$G$ : 重心

$T$ : セン断中心

$r, r+1, \dots, n$ : けたを  $n$  分割したときの分割点

$e_r$ :  $r$  断面の  $G$  と  $T$  との間の距離

$A_r$ :  $r$  断面の断面積

$I_{pr}$ :  $r$  断面の断面2次極モーメント

$J_{r+1}$ :  $r, r+1$  間の平均ねじり抵抗

$C_{wr+1}$ :  $r, r+1$  間の平均曲げねじり抵抗

$I_{r+1}$ :  $r, r+1$  間の  $z$  軸に関する平均断面 2 次モーメント

$\lambda_{r+1}$ :  $r, r+1$  間の区間長

$P_r$ :  $r$  点に作用する  $y$  方向集中荷重

$M_{Tr}$ :  $r$  点に作用する集中ねじりモーメント荷重

$Q_{r,r+1}$ :  $r$  断面で  $r+1$  方向のけたに作用するせん断力

$H_{r,r+1}$ :  $r$  断面で  $r+1$  方向のけたに作用する全ねじりモーメント

$M_r$ :  $r$  断面に作用する  $z$  軸廻りの曲げモーメント

$y_r$ :  $r$  点の垂直変位

$\theta_r$ :  $r$  点のねじれ角

$B_r$ :  $r$  断面に作用する曲げねじりモーメント

$k_{r+1}^2$ :  $k_{r+1}^2 = GJ_{r+1}/EC_{wr+1}$

## 2.1 曲げ振動

図-2において格点  $r$  の両区画部分のせん断力の釣合いを取ると

$$\frac{M_{r-1}}{\lambda_r} - \left( \frac{1}{\lambda_r} + \frac{1}{\lambda_{r+1}} \right) M_r + \frac{M_{r+1}}{\lambda_{r+1}} = -P_r \quad (2-1)$$

ダランベルの原理により  $P_r$  を慣性力  $(-\gamma A_r/g)((\lambda_r + \lambda_{r+1})/2) y_{r,t}^{++}$  で置き換えると振動状態での (2-1) 式は

$$\frac{M_{r-1,t}}{\lambda_r} - \left( \frac{1}{\lambda_r} + \frac{1}{\lambda_{r+1}} \right) M_{r,t} + \frac{M_{r+1,t}}{\lambda_{r+1}} = \frac{\gamma A_r}{g} \frac{(\lambda_r + \lambda_{r+1})}{2} y_{r,t}^{++} \quad (2-2)$$

$++$  は時間  $t$  についての 2 回微分を表わす。正規型の振動を仮定して  $y_{r,t} = y_r \sin pt$ ,  $M_{r,t} = M_r \sin pt$  とおくと

$$\frac{-2g}{\gamma A_r (\lambda_r + \lambda_{r+1})} \left\{ \frac{M_{r-1}}{\lambda_r} - \left( \frac{1}{\lambda_r} + \frac{1}{\lambda_{r+1}} \right) M_r + \frac{M_{r+1}}{\lambda_{r+1}} \right\} = p^2 y_r \quad (2-3)$$

他方 3 連モーメント式は

$$\frac{1}{6E} \left\{ \frac{\lambda_r}{I_r} M_{r-1} + 2 \left( \frac{\lambda_r}{I_r} + \frac{\lambda_{r+1}}{I_{r+1}} \right) M_r + \frac{\lambda_{r+1}}{I_{r+1}} M_{r+1} \right\} = -\frac{y_{r-1}}{\lambda_r} + \left( \frac{1}{\lambda_r} + \frac{1}{\lambda_{r+1}} \right) y_r - \frac{y_{r+1}}{\lambda_{r+1}} \quad (2-4)$$

(2-4), (2-3) 両式をマトリックス表示して

$$\mathbf{A} \{M\} = 6E\mathbf{B} \{y\} \quad (2-5)$$

$$2g\mathbf{C} \{M\} = \gamma p^2 \mathbf{E} \{y\} \quad (2-6)$$

$\mathbf{E}$ : 単位マトリックス, (2-5), (2-6) 両式より  $\{M\}$  を消去して

$$(\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} - \omega^2 \mathbf{E}) \{y\} = 0, \quad \omega^2 = \frac{\gamma p^2}{12gE} \quad (2-7)$$

振動中  $\{y\} \neq 0$  であるから次の振動数方程式が得られる。

$$\det(\mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B} - \omega^2\mathbf{E}) = 0 \quad (2-8)$$

固有値  $\omega^2$  が求められれば、たわみのモードは (2-7) 式より得られ、固有振動周期  $T$ 、固有振動数  $f$  は次式より得られる。

$$T = \frac{2\pi}{p}, \quad f = \frac{1}{T} \quad (2-9)$$

## 2.2 曲げねじり振動

始めにトルクの釣合式、ねじれ角の連続条件すなわち 3 連応力式を誘導する。等分布ねじり荷重  $m_T$  が作用したけたの微分方程式は

$$(EC_w\theta)'' - GJ\theta'' = m_T \quad (2-10)$$

$$B = -EC_w\theta'' \quad (2-11)$$

$\theta$  は  $x$  についての 2 回微分を表わす。各分割点に質量が集中しているとする多質点系の振動を論じているから  $m_T=0$  とし、(2-10)、(2-11) 両式より  $\theta$  を消去すれば

$$\dot{B} - k^2 B = 0 \quad (2-12)$$

図-1 を参照して境界条件 ( $x=0$  で  $B=B_r$ ,  $x=\lambda_{r+1}$  で  $B=B_{r+1}$ ) のもとに (2-12) 式を解くと

$$B = \frac{\sinh k_{r+1}(\lambda_{r+1}-x)}{\sinh k_{r+1}\lambda_{r+1}} B_r + \frac{\sinh k_{r+1}x}{\sinh k_{r+1}\lambda_{r+1}} B_{r+1} \quad (2-13)$$

$r \sim r+1$  間の全ねじりモーメントは

$$H_{r,r+1} = H_{r+1,r} = \frac{\Delta B_r}{\lambda_{r+1}} + \frac{GJ_{r+1}}{\lambda_{r+1}} \Delta\theta_r \quad (2-14)$$

$$\Delta B_r = B_{r+1} - B_r, \quad \Delta\theta_r = \theta_{r+1} - \theta_r \quad (2-15)$$

格点  $r$  の両区画部分のトルクの釣合式  $H_{r,r+1} - H_{r,r-1} + M_{Tr} = 0$  に (2-14) を代入して

$$\begin{aligned} \frac{B_{r-1}}{\lambda_r} - \left( \frac{1}{\lambda_r} + \frac{1}{\lambda_{r+1}} \right) B_r + \frac{B_{r+1}}{\lambda_{r+1}} + \frac{GJ_r}{\lambda_r} \theta_{r-1} - \left( \frac{GJ_r}{\lambda_r} + \frac{GJ_{r+1}}{\lambda_{r+1}} \right) \theta_r \\ + \frac{GJ_{r+1}}{\lambda_{r+1}} \theta_{r+1} + M_{Tr} = 0 \end{aligned} \quad (2-16)$$

次に (2-13) を 2 度積分し

$$\begin{aligned} \iint B dx dx &= \frac{B_r}{k_{r+1}^2} \left\{ \frac{\sinh k_{r+1}(\lambda_{r+1}-x)}{\sinh k_{r+1}\lambda_{r+1}} - \frac{\lambda_{r+1}-x}{\lambda_{r+1}} \right\} \\ &+ \frac{B_{r+1}}{k_{r+1}^2} \left\{ \frac{\sinh k_{r+1}x}{\sinh k_{r+1}\lambda_{r+1}} - \frac{x}{\lambda_{r+1}} \right\} + \frac{\lambda_{r+1}-x}{\lambda_{r+1}} \bar{B}_r \\ &+ \frac{x}{\lambda_{r+1}} \bar{B}_{r+1} = -EC_w\theta \end{aligned} \quad (2-17)$$

$B$  の上の 2 重  $\bar{\phantom{x}}$  は 2 回積分を意味する。(2-17) を  $x$  で微分し、ねじれ角が微分的に連続しているという条件式  $d\theta/dx|_{r,r+1} = d\theta/dx|_{r,r-1}$  に代入すれば

$$\begin{aligned}
 & -\frac{k_r \varphi_{r-1}(1)}{GJ_r} B_{r-1} + \left( \frac{k_r \varphi_{r-1}(0)}{GJ_r} + \frac{k_{r+1} \varphi_r(0)}{GJ_{r+1}} \right) B_r - \frac{k_{r+1} \varphi_r(1)}{GJ_{r+1}} B_{r+1} \\
 & + \frac{\theta_{r-1}}{\lambda_r} - \left( \frac{1}{\lambda_r} + \frac{1}{\lambda_{r+1}} \right) \theta_r + \frac{\theta_{r+1}}{\lambda_{r+1}} = 0
 \end{aligned} \tag{2-18}$$

ただし

$$\left. \begin{aligned}
 \varphi_r(0) &= \frac{1}{\tanh k_{r+1} \lambda_{r+1}} - \frac{1}{k_{r+1} \lambda_{r+1}} \\
 \varphi_r(1) &= \frac{1}{\sinh k_{r+1} \lambda_{r+1}} - \frac{1}{k_{r+1} \lambda_{r+1}}
 \end{aligned} \right\} \tag{2-19}$$

(2-18) がねじれ角の連続条件すなわち 3 連応力式である。

$M_{Tr}$  を慣性トルクで置き換え

$$M_{Tr} = -\frac{\check{r} I_{pr}}{g} \left( \frac{\lambda_r + \lambda_{r+1}}{2} \right)^{++} \theta_{r,t} - \frac{\check{r} A_r}{g} \left( \frac{\lambda_r + \lambda_{r+1}}{2} \right) (e_r^{++} \theta_{r,t}) e_r \tag{2-20}$$

正規型の振動を仮定し  $\theta_{r,t} = \theta_r \sin pt$ ,  $B_{r,t} = B_r \sin pt$  とおくと (2-16) 式は

$$\begin{aligned}
 & \frac{-2g}{\check{r}(\lambda_r + \lambda_{r+1})(I_{pr} + e_r^2 A_r)} \left\{ B_{r-1} - \left( \frac{1}{\lambda_r} + \frac{1}{\lambda_{r+1}} \right) B_r + \frac{B_{r+1}}{\lambda_{r+1}} \right. \\
 & \left. + \frac{GJ_r}{\lambda_r} \theta_{r-1} - \left( \frac{GJ_r}{\lambda_r} + \frac{GJ_{r+1}}{\lambda_{r+1}} \right) \theta_r + \frac{GJ_{r+1}}{\lambda_{r+1}} \theta_{r+1} \right\} - p^2 \theta_r = 0
 \end{aligned} \tag{2-21}$$

(2-18), (2-21) 両式をマトリックス表示して

$$\mathbf{F} \{B\} = \mathbf{B} \{\theta\} \tag{2-22}$$

$$\mathbf{H} \{B\} + \mathbf{I} \{\theta\} = \frac{\check{r} p^2}{2g} \mathbf{E} \{\theta\} \tag{2-23}$$

(2-22), (2-23) 両式より  $\{B\}$  を消去して

$$(\mathbf{H}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{I} - \omega^2 \mathbf{E}) \{\theta\} = 0, \quad \omega^2 = \frac{\check{r} p^2}{2g} \tag{2-24}$$

$\{\theta\} \neq 0$  であるから次の振動数方程式が得られる。

$$\det(\mathbf{H}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{I} - \omega^2 \mathbf{E}) = 0 \tag{2-25}$$

ねじれ角のモードは (2-24) 式より得られる。

ここで等断面, 等区間長の場合を考え 3 連応力式 (2-4) 及び (2-18) 両式を差分式で表現すると

$$\frac{M_r}{EI} + \frac{\Delta^2 M_{r-1}}{6EI} + \frac{\Delta^2 y_{r-1}}{\lambda^2} = 0 \tag{2-26}$$

$$\begin{aligned}
 & \Delta^2 y_{r-1} = y_{r+1} - 2y_r + y_{r-1} \\
 & -\frac{k^2 \lambda^2}{GJ} B_r - \frac{k \lambda \varphi(1)}{GJ} \Delta^2 B_{r-1} + \Delta^2 \theta_{r-1} = 0
 \end{aligned} \tag{2-27}$$

(2-26), (2-27) 両式でそれぞれ  $\Delta^2 M_{r-1} = 0$ ,  $\Delta^2 B_{r-1} = 0$  とおくと  $M = -EI \dot{\theta}$  及び  $B = -EC_w \ddot{\theta}$  の

差分式に一致する。すなわち曲げ振動，曲げねじり振動共に3連応力式をフレキシビリティとする方法が，それぞれ  $\mathcal{A}^2 M_{r-1}$ ， $\mathcal{A}^2 B_{r-1}$  を考慮しているので， $M = -EI\ddot{y}$  及び  $B = -EC_u\ddot{\theta}$  の差分式をフレキシビリティとするよりも精度の良いことが分かる。

### 2.3 連成振動

図-1のような断面で曲げ振動が幅員方向に生ずる場合は，曲げねじり振動が同時に生じ連成振動となる。このときは慣性力，慣性トルクを次のように取る。参考文献1) 参照

$$P_r = -\frac{\gamma A_r}{g} \left( \frac{\lambda_r + \lambda_{r+1}}{2} \right) (z_{r,t}^{++} + e_r \theta_{r,t}^{++}) \quad (2-28)$$

$$M_{Tr} = -\frac{\gamma I_{pr}}{g} \left( \frac{\lambda_r + \lambda_{r+1}}{2} \right) \theta_{r,t}^{++} - \frac{\gamma A_r}{g} \left( \frac{\lambda_r + \lambda_{r+1}}{2} \right) (z_{r,t}^{++} + e_r \theta_{r,t}^{++}) e_r \quad (2-29)$$

(2-28)，(2-29) 両式をそれぞれ (2-1)，(2-16) 式に代入し今までと同様に計算すると ( $M_r$ ， $I_r$  はそれぞれ  $y$  軸廻りの曲げモーメント， $y$  軸に関する断面2次モーメントである。)

$$\frac{-2g}{\gamma A_r (\lambda_r + \lambda_{r+1})} \left\{ \frac{M_{r-1}}{\lambda_r} - \left( \frac{1}{\lambda_r} + \frac{1}{\lambda_{r+1}} \right) M_r + \frac{M_{r+1}}{\lambda_{r+1}} \right\} - p^2 z_r - p^2 e_r \theta_r = 0 \quad (2-30)$$

$$\frac{-2g}{\gamma (\lambda_r + \lambda_{r+1}) (I_{pr} + e_r^2 A_r)} \left\{ \frac{B_{r-1}}{\lambda_r} - \left( \frac{1}{\lambda_r} + \frac{1}{\lambda_{r+1}} \right) B_r + \frac{B_{r+1}}{\lambda_{r+1}} \right\} + \frac{GJ_r}{\lambda_r} \theta_{r-1} - \left( \frac{GJ_r}{\lambda_r} + \frac{GJ_{r+1}}{\lambda_{r+1}} \right) \theta_r + \frac{GJ_{r+1}}{\lambda_{r+1}} \theta_{r+1} - p^2 \theta_r - \frac{e_r A_r}{(e_r^2 A_r + I_{pr})} p^2 z_r = 0 \quad (2-31)$$

(2-30)，(2-31) 両式をマトリックス表示して

$$\frac{2g}{\gamma} \mathbf{C} \{M\} - p^2 \mathbf{E} \{z\} - p^2 \mathbf{D} \{\theta\} = 0 \quad (2-32)$$

$$\mathbf{H} \{B\} + \mathbf{I} \{\theta\} - \frac{\gamma p^2}{2g} \mathbf{E} \{\theta\} - \frac{\gamma p^2}{2g} \mathbf{J} \{z\} = 0 \quad (2-33)$$

(2-32)，(2-33) 両式と3連応力式の(2-4)，(2-22)式の4個の式より  $\{B\}$ ， $\{M\}$ ， $\{\theta\}$  を消去すると

$$\left\{ (\mathbf{H}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{I} - \omega_1 \mathbf{E}) \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} - \omega_2 \mathbf{E}) - \omega_1 \omega_2 \mathbf{J} \right\} \{z\} = 0$$

$$\omega_1 = \frac{\gamma p^2}{2g}, \quad \omega_2 = \frac{\gamma p^2}{12gE} \quad (2-34)$$

$\{z\} \neq 0$  より次の振動数方程式が得られる。

$$\det \left\{ (\mathbf{H}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{I} - \omega_1 \mathbf{E}) \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} - \omega_2 \mathbf{E}) - \omega_1 \omega_2 \mathbf{J} \right\} = 0 \quad (2-35)$$

$\omega_1$ ， $\omega_2$  はそれぞれ，曲げねじり振動及び曲げ振動が独立に生じたときの固有値である。 $p$  が求められれば(2-34)式より水平変位  $z$  のモードが得られ， $\theta$  のモードは次式より得られる。

$$\{\theta\} = \mathbf{D}^{-1} \left( \frac{1}{\omega_2} \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} - \mathbf{E} \right) \{z\} \quad (2-36)$$

連続ばりの場合は、中間支点での  $M, B$  が入ってくるが、ここでは  $z, \theta$  がなくなるので  $M, B$  に対する連続条件式である3連応力式を用いて振動数方程式を求めれば良い。

### 3. 変断面曲線げたの固有振動解析

図-3 に示すような曲率半径が任意に変化する変断面曲線げたの座標を 図-4 のように取る。ここで用いる新しい記号を以下に示す。

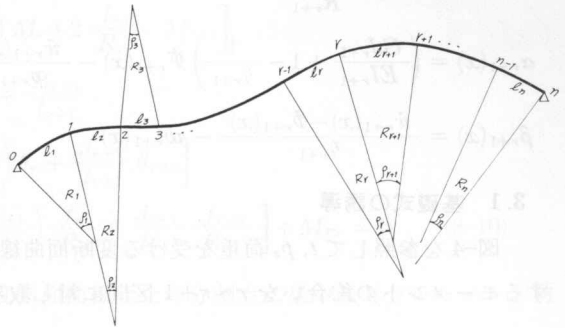


図-3 曲率半径が変化する曲線げた

Fig. 3. Plane shape of a curved girder with variable radius of curvature.

$R_r$ :  $r-1, r$  点間を1個の円曲線で置き換えたときの曲率半径

$l_r$ :  $r-1, r$  点間の円弧長

$I_{y_{r+1}}$ :  $r \sim r+1$  区間の  $y$  軸に関する平均断面2次モーメント ( $I_{y_{r+1}} = I_{r+1}$  と略する)

$P_{zr}$ :  $r$  点に作用する  $z$  方向集中荷重

$M_{yr}$ :  $r$  断面に作用する  $y$  軸廻りの曲げモーメント ( $M_{yr} = M_r$  と略する)

$t$ : 等分布ねじりモーメント荷重及び時間

$p_z$ :  $z$  方向等分布荷重

$f_r$ :  $r$  点の垂直変位

$$\theta_{r+1} = l_{r+1}/R_{r+1}$$

$$\varphi_{r+1} = \theta_{r+1} + f_{r+1}/R_{r+1}$$

ただし  $\varphi_0 = \theta_0 + f_0/R_1$

$$k_{r+1}^2 = \frac{GJ_{r+1}}{ECw_{r+1}} R_{r+1}^2$$

$$\eta_{r+1} = 1 + k_{r+1}^2$$

$$w_{r+1}(x) = \frac{l_{r+1} \sin \frac{x}{R_{r+1}}}{\sin \frac{l_{r+1}}{R_{r+1}}} - x$$

$$\phi_{r+1}(x) = \frac{l_{r+1} \sinh \frac{k_{r+1} x}{R_{r+1}}}{\sinh \frac{k_{r+1} l_{r+1}}{R_{r+1}}} - x$$

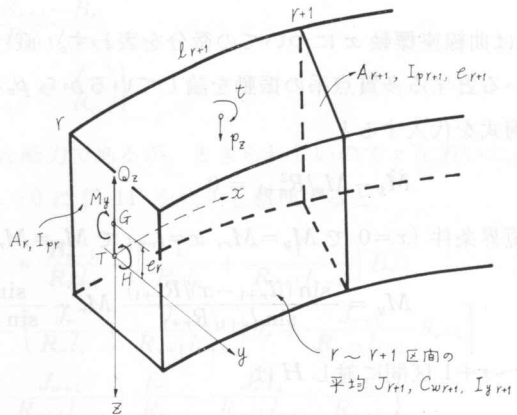


図-4 座標軸と断面諸元

Fig. 4. Axis of coordinates and cross sectional quantities.

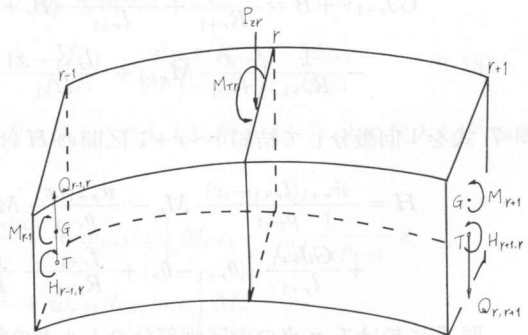


図-5 分割点  $r$  の両区画部分の断面力

Fig. 5. Internal forces of two adjacent elements to  $r$ .

$$\psi_{r+1}(x) = \frac{1}{4 \sin^2 \frac{l_{r+1}}{R_{r+1}}} \left\{ (l_{r+1} + x) \sin \frac{l_{r+1} - x}{R_{r+1}} - (l_{r+1} - x) \sin \frac{l_{r+1} + x}{R_{r+1}} \right\}$$

$$\alpha_{r+1}(x) = \left( \frac{GJ_{r+1}}{EI_{r+1}} + 1 - \frac{1}{\eta_{r+1}} \right) \tilde{\psi}_{r+1}(x) - \frac{\dot{w}_{r+1}(x)}{\rho_{r+1}} + \frac{\dot{w}_{r+1}(x) - \dot{\phi}_{r+1}(x)}{\eta_{r+1}^2 \rho_{r+1}}$$

$$\beta_{r+1}(x) = \frac{\dot{w}_{r+1}(x) - \dot{\phi}_{r+1}(x)}{\eta_{r+1}} - w_{r+1}(x)$$

### 3.1 基礎式の誘導

図-4を参照して、 $t, p_z$  荷重を受ける変断面曲線げたの  $z$  方向の力の釣合い及び  $x, y$  軸に関するモーメントの釣合いを  $r \sim r+1$  区間に対し取ると

$$\dot{Q}_z + p_z = 0 \quad (3-1)$$

$$\dot{H} - M_y/R_{r+1} + t = 0 \quad (3-2)$$

$$\dot{M}_y + H/R_{r+1} - Q_z = 0 \quad (3-3)$$

は曲線座標軸  $x$  についての微分を表わす。直げたのときと同様、各分割点に質量が集中しているとする多質点系の振動を論じているから  $p_z = t = 0$  とおき (3-3) 式を1回微分し (3-1), (3-2) 両式を代入すると

$$\dot{M}_y - M_y/R_{r+1}^2 = 0 \quad (3-4)$$

境界条件 ( $x=0$  で  $M_y = M_r$ ,  $x=l_{r+1}$  で  $M_y = M_{r+1}$ ) のもとに (3-4) 式を解いて

$$M_y = \frac{\sin((l_{r+1} - x)/R_{r+1})}{\sin l_{r+1}/R_{r+1}} M_r - \frac{\sin x/R_{r+1}}{\sin l_{r+1}/R_{r+1}} M_{r+1} \quad (3-5)$$

$r \sim r+1$  区間に対し  $H$  は

$$\dot{H} = GJ_{r+1} \ddot{\phi} - EC_{wr+1} \ddot{\phi} = GJ_{r+1} \ddot{\phi} + \ddot{B} = M_y/R_{r+1} \quad (3-6)$$

これを2回積分して

$$GJ_{r+1} \phi + B = \frac{\bar{M}_y}{R_{r+1}} + \frac{l_{r+1} - x}{l_{r+1}} (B_r + GJ_{r+1} \phi_r) + \frac{x}{l_{r+1}} (B_r + GJ_{r+1} \phi_{r+1}) - \frac{1}{R_{r+1}} \left( \frac{x}{l_{r+1}} \bar{M}_{r+1} + \frac{(l_{r+1} - x)}{l_{r+1}} \bar{M}_r \right) \quad (3-7)$$

(3-7) 式を1回微分して結局  $r \sim r+1$  区間の  $H$  は

$$H = \frac{\dot{w}_{r+1}(l_{r+1} - x)}{\rho_{r+1}} M_r - \frac{\dot{w}_{r+1}(x)}{\rho_{r+1}} M_{r+1} + \frac{B_{r+1} - B_r}{l_{r+1}} + \frac{GJ_{r+1}}{l_{r+1}} \left\{ (\theta_{r+1} - \theta_r) + \frac{f_{r+1}}{R_{r+1}} - \frac{f_r}{R_r} \right\} \quad (3-8)$$

図-5に於ける  $r$  点の両区画部分のトルクの釣合い式  $H_{r+1,r} - H_{r-1,r} + M_{r,r} = 0$  に  $H_{r+1,r} = H|_{x=l_{r+1}}$  および  $H_{r-1,r} = H|_{x=0}$  式でサフィックスを1下げて求まる  $H_{r-1,r}$  を代入し  $\dot{w}_r(0), \dot{w}_r(l_r)$  をテーラー展開し微少項 ( $\rho^3$  以下) を無視して整理すれば



$$\dot{w}_r(0) = \frac{\rho_r^2}{6} + \frac{7\rho_r^4}{360} \doteq \frac{\rho_r^2}{6}, \quad \dot{w}_r(l_r) = -\frac{\rho_r^2}{3} - \frac{\rho_r^4}{45} \doteq -\frac{\rho_r^2}{3} \quad (3-9)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} \left[ 2 \frac{l_r}{R_r} M_{r-1} + \left( \frac{l_r}{R_r} + \frac{l_{r+1}}{R_{r+1}} \right) M_r + 2 \frac{l_{r+1}}{R_{r+1}} M_{r+1} \right] \\ & + \frac{B_{r-1}}{l_r} - \left( \frac{1}{l_r} + \frac{1}{l_{r+1}} \right) B_r + \frac{B_{r+1}}{l_{r+1}} \\ & + G \left[ \frac{J_r}{l_r} \theta_{r-1} - \left( \frac{J_r}{l_r} + \frac{J_{r+1}}{l_{r+1}} \right) \theta_r + \frac{J_{r+1}}{l_{r+1}} \theta_{r+1} \right] \\ & + G \left[ \frac{J_r}{l_r} \frac{f_{r-1}}{R_{r-1}} - \left( \frac{J_r}{l_r} + \frac{J_{r+1}}{l_{r+1}} \right) \frac{f_r}{R_r} + \frac{J_{r+1}}{l_{r+1}} \frac{f_{r+1}}{R_{r+1}} \right] + M_{T_r} = 0 \quad (3-10) \end{aligned}$$

この(3-10)式が曲率半径が任意に変化する変断面曲線げたの分割点に集中ねじりモーメント荷重を受けたときのトルクの釣合い式である。

次に(3-5)式の  $M_y$ 、(3-8)式の  $H$  を(3-3)式に代入し、 $r \sim r+1$  区間の格間せん断力を求めると

$$\begin{aligned} Q_{r,r+1} = Q_{r+1,r} &= \frac{M_{r+1} - M_r}{l_{r+1}} + \frac{B_{r+1} - B_r}{R_{r+1} l_{r+1}} \\ & + \frac{G J_{r+1}}{R_{r+1} l_{r+1}} \left\{ (\theta_{r+1} - \theta_r) + \left( \frac{f_{r+1}}{R_{r+1}} - \frac{f_r}{R_r} \right) \right\} \quad (3-11) \end{aligned}$$

ここで  $Q_{r,r+1}$  は  $(Q_z)_{r,r+1}$  の意味で  $z$  方向のせん断力であるが、まぎらわしいので  $z$  を省いた。

図-5のせん断力の釣合い  $Q_{r,r+1} - Q_{r-1,r} + P_{zr} = 0$  に(3-11)を代入し整理すると

$$\begin{aligned} & \frac{M_{r-1}}{l_r} - \left( \frac{1}{l_r} + \frac{1}{l_{r+1}} \right) M_r + \frac{M_{r+1}}{l_{r+1}} + \frac{B_{r-1}}{R_r l_r} - \left( \frac{1}{R_r l_r} + \frac{1}{R_{r+1} l_{r+1}} \right) B_r \\ & + \frac{B_{r+1}}{R_{r+1} l_{r+1}} + G \left[ \frac{J_r}{R_r l_r} \theta_{r-1} - \left( \frac{J_r}{R_r l_r} + \frac{J_{r+1}}{R_{r+1} l_{r+1}} \right) \theta_r + \frac{J_{r+1}}{R_{r+1} l_{r+1}} \theta_{r+1} \right] \\ & + G \left[ \frac{J_r}{R_r l_r} \frac{f_{r-1}}{R_{r-1}} - \left( \frac{J_r}{R_r l_r} + \frac{J_{r+1}}{R_{r+1} l_{r+1}} \right) \frac{f_r}{R_r} + \frac{J_{r+1}}{R_{r+1} l_{r+1}} \frac{f_{r+1}}{R_{r+1}} \right] \\ & + P_{zr} = 0 \quad (3-12) \end{aligned}$$

次に3連応力式を求めるが、今までと同様に  $r \sim r+1$  区間について求めれば充分である。

(3-6)式に  $G J_{r+1} \ddot{\varphi} = -k_{r+1}^2 B / R_{r+1}^2$  と(3-5)式の  $M_y$  を代入して

$$\ddot{B} - \frac{k_{r+1}^2}{R_{r+1}^2} B = \frac{\sin((l_{r+1}-x)/R_{r+1})}{\sin l_{r+1}/R_{r+1}} \frac{M_r}{R_{r+1}} + \frac{\sin x/R_{r+1}}{\sin l_{r+1}/R_{r+1}} \frac{M_{r+1}}{R_{r+1}} \quad (3-13)$$

これを境界条件 ( $x=0$  で  $B=B_r$ ,  $x=l_{r+1}$  で  $B=B_{r+1}$ ) のもとに解き(3-7)式に代入し  $\varphi$  を求めると

$$\begin{aligned} \varphi &= -\frac{1}{G J_{r+1} \rho_{r+1}} \left\{ \frac{\Phi_{r+1}(x) - w_{r+1}(x)}{\eta_{r+1}} + w_{r+1}(x) \right\} M_{r+1} - \frac{1}{G J_{r+1} \rho_{r+1}} \times \\ & \left\{ \frac{\Phi_{r+1}(l_{r+1}-x) - w_{r+1}(l_{r+1}-x)}{\eta_{r+1}} + w_{r+1}(l_{r+1}-x) \right\} M_r \\ & - \frac{\Phi_{r+1}(x)}{G J_{r+1} l_{r+1}} B_{r+1} - \frac{\Phi_{r+1}(l_{r+1}-x)}{G J_{r+1} l_{r+1}} B_r + \frac{x}{l_{r+1}} \varphi_{r+1} + \frac{(l_{r+1}-x)}{l_{r+1}} \varphi_r \quad (3-13) \end{aligned}$$

この (3-13) 式より, ねじれ角が微分的に連続しているという条件  $d\varphi/dx)_{r,r+1}=d\varphi/dx)_{r,r-1}$  を計算し,  $\beta_r(0), \beta_r(l_r), \dot{\theta}_r(0), \dot{\theta}_r(l_r)$  のテーラー展開の微少項を無視すると ( $\varphi$  はねじれ角でないが,  $\varphi=\theta+f/R$  の線形関係がある.)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6G} \left[ \frac{k_r^2 l_r}{J_r R_r^2} B_{r-1} + 2 \left( \frac{k_r^2 l_r}{J_r R_r^2} + \frac{k_{r+1}^2 l_{r+1}}{J_{r+1} R_{r+1}^2} \right) B_r + \frac{k_{r+1}^2 l_{r+1}}{J_{r+1} R_{r+1}^2} B_{r+1} \right] \\ & + \frac{\theta_{r-1}}{l_r} - \left( \frac{1}{l_r} + \frac{1}{l_{r+1}} \right) \theta_r + \frac{\theta_{r+1}}{l_{r+1}} + \frac{1}{l_r} \frac{f_{r-1}}{R_{r-1}} \\ & - \left( \frac{1}{l_r} + \frac{1}{l_{r+1}} \right) \frac{f_r}{R_r} + \frac{1}{l_{r+1}} \frac{f_{r+1}}{R_{r+1}} = 0 \end{aligned} \quad (3-14)$$

この (3-14) 式が  $R$  が任意に変化する変断面曲線げたの曲げねじりに対する 3 連モーメント式すなわち 3 連応力式である。

次に  $r \sim r+1$  区間の  $M_y$  は  $f, \theta$  を用いて次式で表わされる。(参考文献 3) 参照)

$$M_y = -EI_{y_{r+1}}(\ddot{f} - \theta/R_{r+1}) \quad (3-15)$$

$\theta = \varphi - f/R_{r+1}$  を (3-15) 式に代入し

$$\ddot{f} + \frac{f}{R_{r+1}^2} - \frac{\varphi}{R_{r+1}} + \frac{M_y}{EI_{y_{r+1}}} = 0 \quad (3-16)$$

この (3-16) 式に (3-13) 式の  $\varphi$ , (3-5) 式の  $M_y$  を代入して境界条件 ( $x=0$  で  $f=f_r$ ,  $x=l_{r+1}$  で  $f=f_{r+1}$ ) のもとに解き, たわみ角の連続条件  $df/dx)_{r,r+1}=df/dx)_{r,r-1}$  を計算し  $\alpha_r(0), \alpha_r(l_r)$  の微少項を無視すると

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{E} \left[ \frac{l_r}{I_r} M_{r-1} + 2 \left( \frac{l_r}{I_r} + \frac{l_{r+1}}{I_{r+1}} \right) M_r + \frac{l_{r+1}}{I_{r+1}} M_{r+1} \right] \\ & + \left[ \frac{l_r}{R_r} \theta_{r-1} + 2 \left( \frac{l_r}{R_r} + \frac{l_{r+1}}{R_{r+1}} \right) \theta_r + \frac{l_{r+1}}{R_{r+1}} \theta_{r+1} \right] \\ & + \left[ \frac{l_r}{R_r} \frac{f_{r-1}}{R_{r-1}} + 2 \left( \frac{l_r}{R_r} + \frac{l_{r+1}}{R_{r+1}} \right) \frac{f_r}{R_r} + \frac{l_{r+1}}{R_{r+1}} \frac{f_{r+1}}{R_{r+1}} \right] \\ & - \left( \frac{l_r}{R_r^2} + \frac{6}{l_r} \right) f_{r-1} - \left\{ \frac{2l_r}{R_r^2} + \frac{2l_{r+1}}{R_{r+1}^2} - 6 \left( \frac{1}{l_r} + \frac{1}{l_{r+1}} \right) \right\} f_r \\ & - \left( \frac{l_{r+1}}{R_{r+1}^2} + \frac{6}{l_{r+1}} \right) f_{r+1} = 0 \end{aligned} \quad (3-17)$$

この (3-17) 式が  $R$  が任意に変化する変断面曲線げたの曲げに対する 3 連モーメント式すなわち 3 連応力式である。

### 3.2 z 方向の曲げ振動と曲げねじり振動との連成振動

3 連応力式 (3-14), (3-17) 両式をマトリックス表示して

$$\mathbf{A} \{B\} + 6\mathbf{GB} \{\theta\} + 6\mathbf{GC} \{f\} = 0 \quad (3-18)$$

$$\mathbf{D} \{M\} - \mathbf{EF} \{\theta\} - 6\mathbf{EG} \{f\} = 0 \quad (3-19)$$

慣性力及び慣性トルクを次式のように静荷重に置換する。

$$P_{zr} = -\frac{\gamma A_r}{2g} (l_r + l_{r+1}) f_{r,t}^{\ddagger} \quad (3-20)$$

$$M_{Tr} = -\frac{\gamma I_{pr}}{2g} (l_r + l_{r+1}) \theta_{r,t}^{\ddagger} - \frac{\gamma A_r e_r}{2g} (l_r + l_{r+1}) e_r \theta_{r,t}^{\ddagger} \quad (3-21)$$

正規型の振動を仮定して

$$\left. \begin{aligned} \theta_{r,t} &= \theta_r \sin pt, & B_{r,t} &= B_r \sin pt \\ f_{r,t} &= f_r \sin pt, & M_{r,t} &= M_r \sin pt \end{aligned} \right\} \quad (3-22)$$

(3-21), (3-20) 式をそれぞれトルクの釣合式 (3-10), 及びせん断力の釣合式 (3-12) に代入し (3-22) 式の関係を用いると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} \left[ 2 \frac{l_r}{R_r} M_{r-1} + \left( \frac{l_r}{R_r} + \frac{l_{r+1}}{R_{r+1}} \right) M_r + 2 \frac{l_{r+1}}{R_{r+1}} M_{r+1} \right] \\ & + \left[ \frac{B_{r-1}}{l_r} - \left( \frac{1}{l_r} + \frac{1}{l_{r+1}} \right) B_r + \frac{B_{r+1}}{l_{r+1}} \right] \\ & + G \left[ \frac{J_r}{l_r} \theta_{r-1} - \left( \frac{J_r}{l_r} + \frac{J_{r+1}}{l_{r+1}} \right) \theta_r + \frac{J_{r+1}}{l_{r+1}} \theta_{r+1} \right] \\ & + G \left[ \frac{J_r}{l_r R_{r-1}} f_{r-1} - \left( \frac{J_r}{l_r} + \frac{J_{r+1}}{l_{r+1}} \right) \frac{f_r}{R_r} + \frac{J_{r+1}}{l_{r+1} R_{r+1}} f_{r+1} \right] \\ & + \omega^2 \frac{(l_r + l_{r+1})}{2} (e_r^2 A_r + I_{pr}) \theta_r = 0 \end{aligned} \quad (3-22)$$

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{\gamma p^2}{g} \\ & \left[ \frac{M_{r-1}}{l_r} - \left( \frac{1}{l_r} + \frac{1}{l_{r+1}} \right) M_r + \frac{M_{r+1}}{l_{r+1}} \right] \\ & + \left[ \frac{B_{r-1}}{R_r l_r} - \left( \frac{1}{R_r l_r} + \frac{1}{R_{r+1} l_{r+1}} \right) B_r + \frac{B_{r+1}}{R_{r+1} l_{r+1}} \right] \\ & + G \left[ \frac{J_r}{R_r l_r} \theta_{r-1} - \left( \frac{J_r}{R_r l_r} + \frac{J_{r+1}}{R_{r+1} l_{r+1}} \right) \theta_r + \frac{J_{r+1}}{R_{r+1} l_{r+1}} \theta_{r+1} \right] \\ & + G \left[ \frac{J_r}{R_r l_r} \frac{f_{r-1}}{R_{r-1}} - \left( \frac{J_r}{R_r l_r} + \frac{J_{r+1}}{R_{r+1} l_{r+1}} \right) \frac{f_r}{R_r} + \frac{J_{r+1}}{R_{r+1} l_{r+1}} \frac{f_{r+1}}{R_{r+1}} \right] \\ & + \omega^2 A_r \frac{(l_r + l_{r+1})}{2} f_r = 0 \end{aligned} \quad (3-23)$$

(3-22), (3-23) 両式をマトリックス表示して

$$\frac{1}{6} \mathbf{H} \{M\} + \mathbf{B} \{B\} + \mathbf{GI} \{\theta\} + \mathbf{GJ} \{f\} + \omega^2 \mathbf{K} \{\theta\} = 0 \quad (3-24)$$

$$\mathbf{B} \{M\} + \mathbf{L} \{B\} + \mathbf{GM} \{\theta\} + \mathbf{GN} \{f\} + \omega^2 \mathbf{P} \{f\} = 0 \quad (3-25)$$

(3-18), (3-19) 式よりそれぞれ  $\{B\}$ ,  $\{M\}$  を求め (3-24), (3-25) 両式に代入して

$$\mathbf{U} \{f\} + \mathbf{V} \{\theta\} = 0 \quad (3-26)$$

$$\mathbf{X} \{f\} + \mathbf{Y} \{\theta\} = 0 \quad (3-27)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{U} &= \mathbf{EHD}^{-1}\mathbf{G} - 6\mathbf{G}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} + \mathbf{G}\mathbf{J} \\ \mathbf{V} &= (1/6)\mathbf{EHD}^{-1}\mathbf{F} - 6\mathbf{G}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{G}\mathbf{I} + \omega^2\mathbf{K} \\ \mathbf{X} &= 6\mathbf{E}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{G} - 6\mathbf{G}\mathbf{L}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} + \mathbf{G}\mathbf{N} + \omega^2\mathbf{P} \\ \mathbf{Y} &= \mathbf{E}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{F} - 6\mathbf{G}\mathbf{L}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{G}\mathbf{M} \end{aligned} \right\} \quad (3-28)$$

(3-26), (3-27) 両式より  $\{f\}$  を消去して

$$(\mathbf{X}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{V} - \mathbf{Y})\{\theta\} = 0 \quad (3-29)$$

$\{\theta\} \neq 0$  より次の振動数方程式が得られる。

$$\text{Det}(\mathbf{X}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{V} - \mathbf{Y}) = 0 \quad (3-30)$$

曲げねじり振動優先のとき、 $\theta$  のモードは (3-29) より求められ、付随して生ずる  $f$  のモードは次式より得られる。

$$\{f\} = -\mathbf{U}^{-1}\mathbf{V}\{\theta\} \quad \text{or} \quad -\mathbf{X}^{-1}\mathbf{Y}\{\theta\} \quad (3-31)$$

曲げ振動優先のときの  $f$  のモードは (3-32) 式より、付随して生ずる  $\theta$  のモードは (3-33) 式より求められる。

$$(\mathbf{Y}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{U} - \mathbf{X})\{f\} = 0 \quad (3-32)$$

$$\{\theta\} = -\mathbf{V}^{-1}\mathbf{U}\{f\} \quad \text{or} \quad -\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{X}\{f\} \quad (3-33)$$

以上の式で  $R = \infty$  とすれば変断面直ばりで曲げ振動、曲げねじり振動がそれぞれ独立に生ずるときの振動数方程式が得られ、(2-8) 及び (2-25) 式に一致することが確かめられる。

なおここで論じた連成振動以外に、幅員方向の曲げ振動と曲げねじり振動との連成振動、 $x$  方向と幅員方向、両者の曲げ振動と曲げねじり振動との連成振動があるが、今までと同様の方法で解析できるのでここでは省略する。

## 4. 数値計算例

### 4.1 単純支持等断面直げたの曲げ振動

#### (1) 3連応力式をフレキシビリティとする場合

(2-4), (2-3) 両式を差分式で表わしフーリエ定和分変換を行なうと

$$\frac{EI}{\lambda^2} D_i \mathbf{S}_i [y_r] = \frac{(6-D_i)}{6} \mathbf{S}_i [M_r] \quad (4-1)$$

$$D_i \mathbf{S}_i [M_r] = \frac{\gamma \lambda^2 A}{g} p^2 \mathbf{S}_i [y_r] \quad (4-2)$$

$$D_i = 2 \left( 1 - \cos \frac{i\pi}{n} \right)$$

フーリエ定和分変換については参考文献4) 参照、(4-1), (4-2) 両式より

$$p_i = \frac{n^2 D_i}{l^2} \sqrt{\frac{6}{6-D_i}} \sqrt{\frac{EIg}{\gamma A}} \quad (4-3)$$

(2)  $M=EI\ddot{y}$  の差分式をフレキシビリティとする場合

$M_r = -EI\Delta^2 y_{r-1}/l^2$  をフーリエ定和分変換して

$$\mathbf{S}_i[M_r] = \frac{EI}{l^2} D_i \mathbf{S}_i[y_r] \quad (4-4)$$

(4-4), (4-2) 両式より

$$p_i = \frac{n^2 D_i}{l^2} \sqrt{\frac{EIg}{\gamma A}} \quad (4-5)$$

厳密解は

$$p_i = \frac{i^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EIg}{\gamma A}} \quad (4-6)$$

以上により 図-6 に固有振動数  $f$  の精度を分割数  $n$  に対し, 1次振動から3次振動まで示す。

## 4.2 等断面固定支持直げたの曲げねじり振動

## (1) 3連応力式をフレキシビリティとする場合

(2-21), (2-19) 両式を差分式で表わしフーリエ定和分変換をすると

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -D_i & -GJD_i + \frac{\gamma \lambda^2 p^2}{g} (I_p + e^2 A) \\ -\varphi(1) D_i + 2(\varphi(1) - \varphi(0)) & \frac{GJD_i}{k\lambda} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{S}_i[B_r] \\ \mathbf{S}_i[\theta_r] \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} \alpha_i B_0 \sin \frac{i\pi}{n} \\ \varphi(1) \alpha_i B_0 \sin \frac{i\pi}{n} \end{Bmatrix} \quad (4-7) \\ & \alpha_i = \begin{cases} (-1)^i - 1 & \text{for 対称振動} \\ -(-1)^i - 1 & \text{for 逆対称振動} \end{cases} \end{aligned}$$

(4-7) 式より  $\mathbf{S}_i[B_r]$ ,  $\mathbf{S}_i[\theta_r]$  を求めフーリエ定和分逆変換公式より

$$B_1 = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{S}_i[B_r] \sin \frac{i\pi}{n}, \quad \theta_1 = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{S}_i[\theta_r] \sin \frac{i\pi}{n} \quad (4-8)$$

境界条件  $\partial\theta/\partial x|_{r=0} = 0$  は (2-17) 式より

$$B_0 \varphi(0) - B_1 \varphi(1) + \frac{EC_w k}{\lambda} \theta_1 = 0 \quad (4-9)$$

(4-8) 式を (4-9) 式に代入して振動数方程式は

$$\begin{aligned} & -\varphi(0) + \frac{2\varphi(1)}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i}{A_1} \left[ \frac{GJD_i}{k\lambda} + \varphi(1) \left\{ GJD_i - \frac{\gamma \lambda^2}{g} (I_p + e^2 A) p^2 \right\} \right] \sin^2 \frac{i\pi}{n} \\ & + \frac{EC_w k}{\lambda} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2\alpha_i}{A_1} \left\{ \varphi(0) - \varphi(1) \right\} \sin^2 \frac{i\pi}{n} = 0 \quad (4-10) \end{aligned}$$

$$A_1 = -\frac{GJD_i^2}{k\lambda} + \left\{ -\varphi(1) D_i + 2(\varphi(1) - \varphi(0)) \right\} \left\{ GJD_i - \frac{\gamma \lambda^2}{g} (I_p + e^2 A) p^2 \right\}$$

(2)  $B = -EC_w \ddot{\theta}$  の差分式をフレキシビリティとする場合

(2-21) 式の差分式と  $B_r = -EC_w \Delta^2 \theta_{r-1} / \lambda^2$  をフーリエ定和分変換して

$$\begin{bmatrix} -D_i & -GJD_i + \frac{\gamma \lambda^2 p^2}{g} (I_p + e^2 A) \\ \lambda_2 & -EC_w D_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{S}_i [B_r] \\ \mathbf{S}_i [\theta_r] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_i B_0 \sin \frac{i\pi}{n} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4-11)$$

(4-11) 式より  $\mathbf{S}_i [B_r]$ ,  $\mathbf{S}_i [\theta_r]$  を求め (4-8), (4-9) 式より振動数方程式は

$$-\varphi(0) + \frac{2\varphi(1)}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i}{\Delta_2} \frac{EC_w D_i}{\lambda^2} \sin^2 \frac{i\pi}{n} + \frac{EC_w k}{\lambda} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i}{\Delta^2} \sin^2 \frac{i\pi}{n} = 0 \quad (4-12)$$

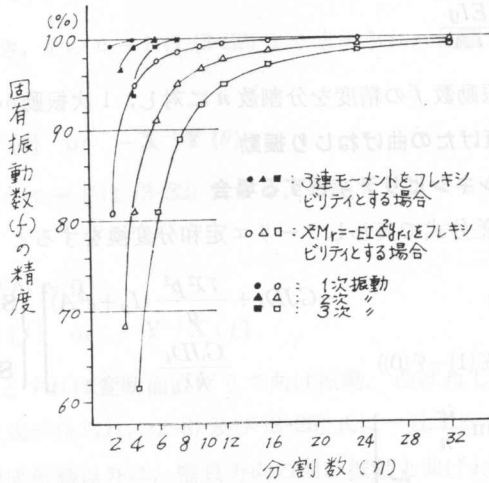


図-6 単純ばり曲げ振動

Fig. 6. The bending vibration for the simple beam.

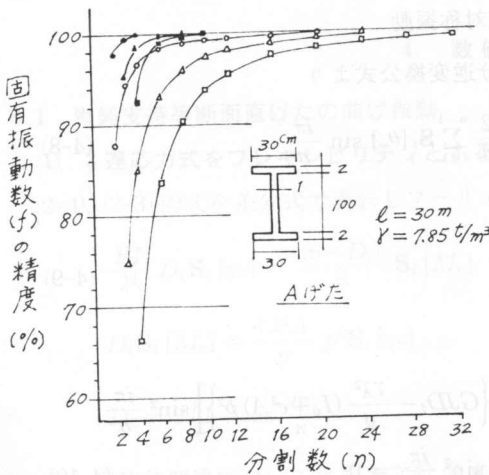


図-7 単純ばり曲げねじり振動

Fig. 7. The torsion bending vibration for the simple beam.

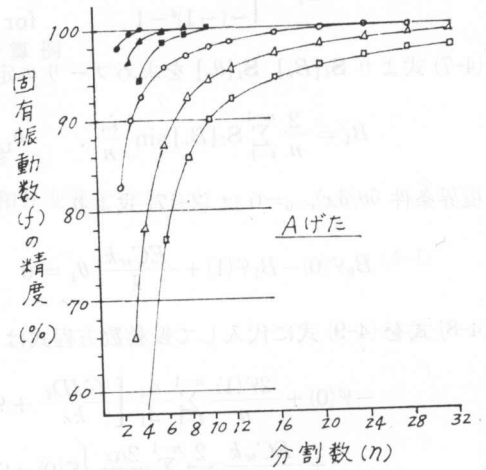


図-8 固定ばり曲げねじり振動

Fig. 8. The torsion bending vibration for the fixed beam.

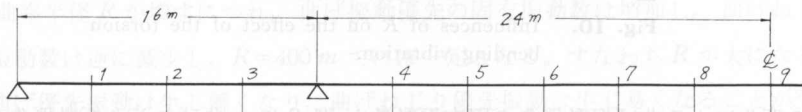
$$J_2 = -\frac{EC_w D_i^2}{\lambda^2} - GJD_i + \frac{\gamma \lambda^2}{g} (I_p + e^2 A) p^2$$

図-7に示したけたについて固有振動数  $f$  の精度を単純支持の場合を図-7に、固定支持の場合を図-8に示す。

### 4.3 上姫川橋中央径間の円弧曲線げた ( $R$ の影響について)

上姫川橋は、中央径間の左右に突げた径間を有する PRC ラーメン、ボックス断面曲線げたの構造形式である。断面諸元を表-1に示す。ここでは曲率半径  $R$  が固有振動数に及ぼす影響をみるため、上姫川橋中央径間を固定支持の円弧曲線げたとして、 $n=12$ 、スパン  $l=48$  m を一定にして  $R$  を 20 m から 1,000 m まで変化させて計算した。

表-1 上姫川橋断面諸元  
Table 1. Cross sectional quantities of Kamihimekawa bridge



$A_r$ (m <sup>2</sup> )	5.2977	5.3263	5.8460		5.5730	4.8520	4.1999	3.7813	3.4594	3.4594
$e_r$ (m)	0.1728	0.2275	0.4973		0.3524	0.2043	0.0556	0.0981	0.1425	0.1425
$I_{pr}$ (m <sup>4</sup> )	24.438	25.940	28.689		25.751	21.066	18.041	16.400	15.592	15.592
$I_r$ (m <sup>4</sup> )	3.3981	4.2309	5.3273	6.5684	5.7627	3.3577	1.7871	1.0394	0.7371	0.6577
$J_r$ (m <sup>6</sup> )	7.1180	8.5867	10.316	12.095	10.822	6.9744	4.1360	2.6058	1.9220	1.7306
$C_{wr}$ (m <sup>3</sup> )	2.4325	2.8164	3.1087	3.2603	3.0305	2.3442	1.6568	1.1905	0.9866	0.9546

$$R = 400 \text{ m} \quad G = 141 \times 10^4 \text{ t/m}^2$$

$$E = 324 \times 10^4 \text{ t/m}^2 \quad \gamma = 2.5 \text{ t/m}^3$$

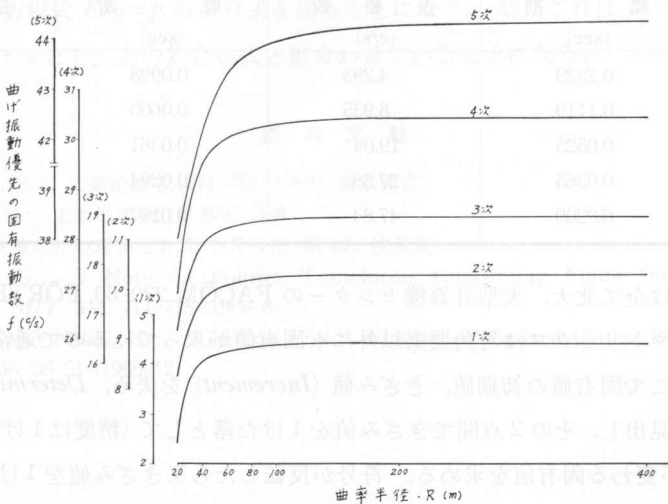


図-9 曲げ振動優先の固有振動数に対する  $R$  の影響

Fig. 9. Influences of  $R$  on the effect of the bending vibration.

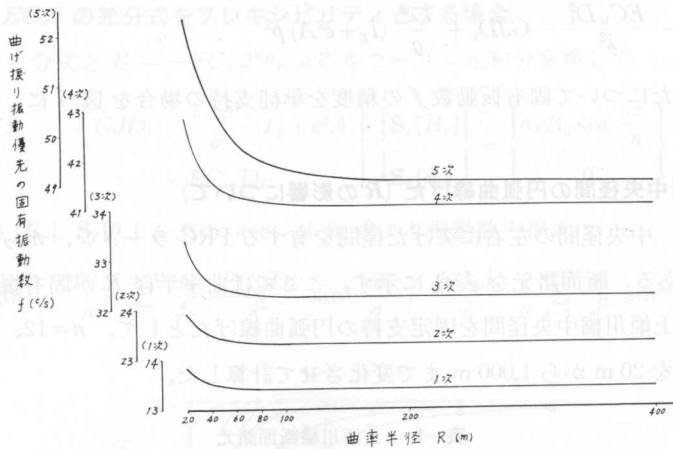


図-10 曲げねじり振動優先の固有振動数に対する R の影響

Fig. 10. Influences of R on the effect of the torsion bending vibration.

R の変化による曲げ振動優先の固有振動数を 図-9 に、曲げねじり振動優先の固有振動数を 図-10 にそれぞれ 5 次振動まで示す。

#### 4.4 上姫川 3 径間連続円弧曲線げた

変断面連続曲線げたの計算例として、上姫川橋を 3 径間連続曲線げたとみなし表-1 の断面諸元を用い、中央径間、側径間をそれぞれ 12, 4 分割して計算した。

固有振動数、固有振動周期を以下に示す。

次 数	曲 げ 振 動 優 先		曲 げ ね じ り 振 動 優 先	
	周 期 (sec)	振 動 数 (c/s)	周 期 (sec)	振 動 数 (c/s)
1	0.2329	4.293	0.0998	10.02
2	0.1119	8.935	0.0600	16.68
3	0.0525	19.04	0.0361	27.73
4	0.0365	27.36	0.0294	34.05
5	0.0209	47.84	0.0197	50.88

以上の計算は全て北大、大型計算機センターの FACOM 230-60, FORTTRAN で行った。ここで扱う固有マトリックスは対角要素以外にも固有値が入ってくるので通常のライブラリーは使えない。そこで固有値の初期値、きざみ値 (Increment) を決め、Determinant の符号が変わる 2 点の値を見出し、その 2 点間できざみ値を 1 けた落として (精度は 1 けた上がる) Determinant の符号が変わる固有値を求める。符号が反転したら又きざみ値を 1 けた落とし、符号の反転する固有値を求めていく。これを反復して所要の精度の固有値を求め、 $n-1$  元の連立方程式を解いて固有ベクトルを求めた。フローチャートは非常に複雑になるので省略する。



## 5. 考 察

ディスクリートな振動系を想定するとき、力 (or トルク) の釣合い式ともう 1 本フレキシビリティに関する式があるが、このフレキシビリティとして 3 連応力式を用いる方が、曲げ振動に対しては  $M = -EI\ddot{\eta}$  の差分式 (曲げねじり振動に対しては  $B = -EC_u\ddot{\theta}$  の差分式) を用いるより精度の良いことを明らかにした。例えば 図-6 より等断面単純支持げたの曲げ振動 1 次に対して、3 連応力式による場合は 2 分割で厳密解の約 99%、4 分割で約 100% であるが、 $M = -EI\ddot{\eta}$  の差分式による場合はそれぞれ約 81%、95% である。また 図-6, 7, 8 より曲げ振動、曲げねじり振動共に  $M = -EI\ddot{\eta}$  (or  $B = -EC_u\ddot{\theta}$ ) の差分式をフレキシビリティとする方法が、3 連応力式による方法より高次振動において誤差が大きい。結局分割数が少なくても 3 連応力式をフレキシビリティとした場合、精度はそれほど落ちない。次に曲線げたの場合 図-9, 10 において曲率半径  $R$  が増すにつれ、曲げ振動優先の固有振動数は増加し、曲げねじり振動優先の固有振動数は逆に減少し、 $R = 400 \text{ m}$  でほぼ一定となる。すなわち  $R$  が大になると、連成振動の内曲げ優先振動は生じ難くなり、曲げねじり優先振動は生じ易くなることが分かる。

上姫川橋は  $R = 400 \text{ m}$  であるが直げたとして曲げ振動及び曲げねじり振動をそれぞれ独立に求めても大差なく、実際に参考文献 2) では  $R$  の影響を無視できることを述べている。また上姫川橋を 3 径間連続曲線げたとした場合と、中央径間のみを 1 スパンの固定支持曲線げたとした場合では、固有振動数は後者の方が高くなっており、前者に比べより剛な構造物であると言える。曲線げたに対する本解析法は S 字形、クロノイド曲線げた等  $R$  の変化する曲線げたに特に有効である。

最後に有限要素法との関連であるが、有限要素法によるはりの解析で剛性マトリックスは、はりの弾性方程式  $EI\ddot{\eta} = p$  の差分式を使うことになり、結局これは  $M = -EI\ddot{\eta}$  の差分式をフレキシビリティとし、力の釣合い式と組合わせていることになる。

## 参 考 文 献

- 1) チモンシェンコ, S.: 工業振動学, 371-375 (1969), 東京図書。
- 2) 函館開発建設部: 上姫川橋設計計算書, 5-8.
- 3) 渡辺 昇: 曲線げたの理論と計算, 537-542 (昭 42), 技報堂。
- 4) Nomachi, S. G.: A Note on Fourier Transforms Concerning Finite Integration, *Trans. Mem. of MIT*, 5-2, 711-718 (1966-8).
- 5) Komatsu, S. and Nakai, H.: Study on Free Vibration of Curved Girder Bridges, *Trans. of JSCE*, 136, 35-51 (1966-12).