

# 乱流境界層の中におかれた平板のまわりの 二次元流れに関する研究 (第2報)

— 風洞天井壁の干渉を受ける単独平板の抗力 —

坂 本 弘 志\*  
森 谷 優\*  
阿 部 清\*

(昭和46年9月29日受理)

## A Study on the Two-Dimensional Flow about Flat Plates Vertically Immersed in Turbulent Boundary Layers (Part 2)

— On the form drag of a flat plate subjected to an  
interference of the tunnel walls —

by Hiroshi SAKAMOTO, Masaru MORIYA and Kiyosi ABE

This paper is a part of experimental investigations on the characteristics of the flow about flat plates vertically immersed in turbulent boundary layers. In the first paper, the characteristics of the flow about a flat plate i.e. the distributions of velocity, pressure and the flow patterns, were discussed.

The present paper describes both theoretically and experimentally the interference effects of the tunnel walls on the behavior of the streamline separated from the edge of the plate, together with the variation of the form drag of the plate.

### 1. 緒 論

本研究は、乱流境界層の中に存在する物体を最も簡単な形状を有する垂直平板におきかえ、それらのまわりの流れならびに抵抗などに関する一連の研究であって、これまで平板のまわりの平均流線図、平板表面上の圧力分布、平板の抗力などについて報告してきた。

本報では、風洞床面に設置された単独平板からはく離する流線に関する理論的、実験的考察について報告する。平板先端からはく離する流線は物体後方のウェークの形状や平板の抗力に大きな影響をもっており、このはく離流線の性質を正しく把握することは非常に重要な意義を有している。したがって、はく離流線の形状を理論的に求めようとする試みは比較的数量も多く、これまでも無限流体の中に存在する平板、円筒などはく離流線について報告されてきている。しかし、実際にはパイプ内に存在する物体や風洞内に設置された物体のはく離流線の

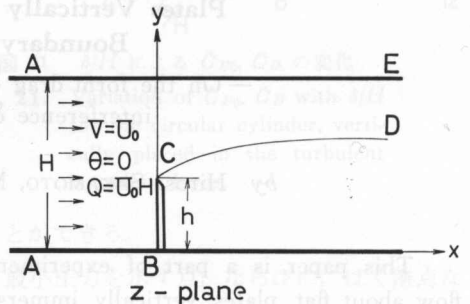
\* 北見工業大学機械工学科

ように壁面の影響を受けるものが数多くあり、当然壁面の効果を考慮しなければならない。しかし、これらについての研究は非常に少ないのが現状である。

本報告は、かかる見地に立って、風洞床面に設置された平板の高さを種々に変化させ、風洞天井壁の存在が平板の先端からはく離する流線の形状、流線上の速度および平板の抗力に対していかなる影響を与えるものであるかということについて理論と実験とによる検討を行なって定量的な値を求め、かつ、物体の排除効果を取除くために本実験が行なった一つの実験的手法の妥当性を明らかにしたものである。

2. 平板の先端からはく離する流線上の速度に関する理論解析

解析を進めるために 図1に示すような  $z$ -平面を考える、風洞の試験断面の高さを  $H$ 、平板の高さを  $BC(=h)$  とし、 $AE$  は風洞の天井壁で、 $CD$  は平板の先端からはく離する流線とする。また、点  $B$  を原点として風洞床面に沿って下流方向に向って  $x$  軸、風洞の試験断面の高さ方向に  $y$  軸をそれぞれ採用する。したがって、流れの場である  $z$ -平面はつぎの式によって表わされる。



$$z = x + iy \tag{1}$$

つぎに  $z$ -平面上の  $A, B, C, D, E$  なる速度の大きさを表わすために  $\zeta$ -平面を考え、

図1 物理平面

Fig. 1. The physical plane.

$$\zeta = \frac{1}{V} e^{i\theta} \tag{2}$$

なるものとする。式(2)によると、 $\zeta$ -平面の各点における値は表1に示すようになる。したがって、 $\zeta$ -平面は図2に示すものとなる。

表1  $z$ -,  $\zeta$ -平面の各点の値

Table. 1. The value of each point in the  $z$ -,  $\zeta$ -plane

Point	$Z$ - plane	$\zeta$ - plane
A	$\theta = 0 \quad V = U_0$	$\zeta_A = 1/U_0$
B	$\theta = 0 \text{ or } \pi/2 \quad V = 0$	$\zeta_B = \infty \text{ or } i\infty$
C	$\theta = \pi/2 \quad V = 1$	$\zeta_C = i1$
D	$\theta = 0 \quad V = 1$	$\zeta_D = 1$
E	$\theta = 0 \quad V = 1$	$\zeta_E = 1$

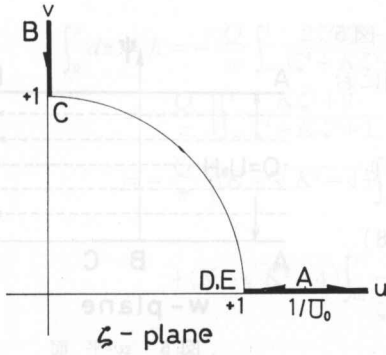


図2 ζ-平面  
Fig. 2. The ζ-plane.

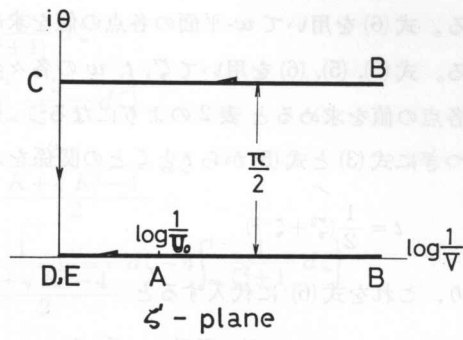


図3 ζ'-平面  
Fig. 3. The ζ'-plane.

つぎに

$$\zeta' = \log \zeta = \log \frac{1}{V} + i\theta \quad (3)$$

なる式で与えられる ζ'-平面上の各点における値を求めると図3のようになる。ここで ζ'-平面と t-平面との関係を求めるために t-平面を図4のように仮定し、シュバルツクリストフェルの変換を適用すると、ζ' と t との関係は

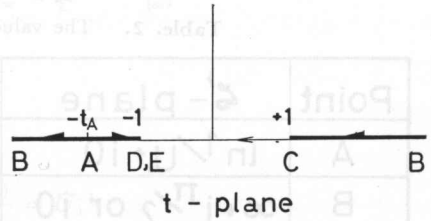


図4 t-平面  
Fig. 4. The t-plane.

$$\zeta' = \alpha \int \frac{1}{\sqrt{(-1-t)(1-t)}} dt + \beta = \alpha \int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}} dt + \beta = \alpha \cosh^{-1} t + \beta \quad (4)$$

であって、C と D 点とにおける境界条件によって定数 α, β を定める。すなわち、C 点では t=1, ζ'=iπ/2 であるから式(4)に代入すると、β=iπ/2 となる。また D 点では t=-1, ζ'=0 であるから同様にして、α=-1/2 となる。したがって、式(4)は

$$\zeta' = -\frac{1}{2} \cosh^{-1} t + i\frac{\pi}{2} \quad (5)$$

となる。

つぎに t-平面と w-平面との関係を見出す。いま、t-平面の A 点に強さ m の吹出しがあり、D, E 点に強さ m の吸込みが存在するものとすれば

$$\left. \begin{aligned} w &= \phi + i\psi = m \log(t+t_A) - m \log(t+1) \\ &= m \log\left(\frac{t+t_A}{t+1}\right) = \frac{Q}{\pi} \log\left(\frac{t+t_A}{t+1}\right) = \frac{Q}{\pi} \log\left(\frac{t+\frac{K}{2}}{t+1}\right) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

となる。ここで t\_A は式(5)から

$$\left. \begin{aligned} t_A &= \cosh\left(i\pi - 2\zeta'\right) = \cosh\left(i\pi - 2 \log \frac{1}{U_0}\right) \\ &= -\cosh\left(2 \log \frac{1}{U_0}\right) = -\frac{1}{2} \left(U_0^2 + U_0^{-2}\right) = \frac{K}{2} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

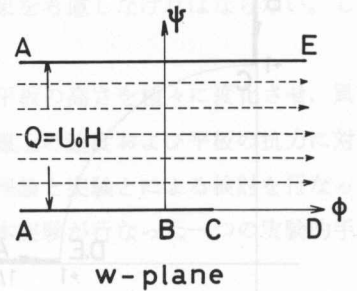
である。式(6)を用いて  $w$ -平面の各点の値を求めると図5になる。式(3), (5), (6)を用いて  $\zeta'$ ,  $t$ ,  $w$  の各々の平面における各点の値を求めると表2のようになる。

つぎに式(3)と式(5)から  $t$  と  $\zeta$  との関係を求めると

$$t = \frac{1}{2}(\zeta^2 + \zeta^{-2}) \tag{8}$$

となり、これを式(6)に代入すると

$$w = \frac{Q}{\pi} \log \left( \frac{\zeta^4 + K\zeta^2 + 1}{\zeta^4 + 2\zeta^2 + 1} \right) \tag{9}$$



w-plane

図5 w-平面

Fig. 5. The  $w$ -plane.

表2  $\zeta'$ -,  $t$ -,  $w$ -平面の各点の値

Table. 2. The value of each point in the  $\zeta'$ -,  $t$ -,  $w$ -plane

Point	$\zeta'$ - plane	$t$ - plane	$w$ - plane
A	$\ln 1/U_0 + i0$	$t_A = -1/2(U_0^2 + U_0^{-2})$	$-\infty$
B	$\infty + i\pi/2$ or $i0$	$\pm \infty$	0
C	$0 + i\pi/2$	$\pm 1$	$Q/\pi \ln(1 + t_A/2)$
D	$0 + i0$	-1	$+\infty$
E	$0 + i0$	-1	$+\infty$

となる。この式は  $w$  と  $\zeta$  との関係を与えるものである。ところが

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{V} e^{i\theta} = \zeta \tag{10}$$

であるから

$$dz = \zeta dw = \zeta \frac{dw}{d\zeta} d\zeta \tag{11}$$

となり、式(9)によると

$$\frac{dw}{d\zeta} = \frac{Q}{\pi} \left\{ \frac{d}{d\zeta} \log \left( \frac{\zeta^4 + K\zeta^2 + 1}{\zeta^2 + 2\zeta^2 + 1} \right) \right\} = -\frac{Q}{\pi} \left\{ \frac{2\zeta(\zeta^2 - 1)(K - 2)}{(\zeta^4 + K\zeta^2 + 1)(\zeta^2 + 1)} \right\} \tag{12}$$

となるので式(11)は

$$dz = -\frac{Q}{\pi} \left\{ \frac{2\zeta^2(\zeta^2 - 1)(K - 2)}{(\zeta^4 + K\zeta^2 + 1)(\zeta^2 + 1)} d\zeta \right\} \tag{13}$$

となる。式(13)を  $(0, iy)$  の位置で積分すれば平板  $BC$  の高さ<sup>2</sup>と速度との関係が求まる。すなわち、

$$\begin{aligned}
 \int_0^y dz &= h = -\frac{Q}{\pi} \int_0^1 \frac{2\zeta^2(\zeta^2-1)(K-2)}{(\zeta^4+K\zeta^2+1)(\zeta^2+1)} d\zeta \\
 &= -\frac{Q}{\pi} \left\{ \int_0^1 \frac{K\zeta^2+2}{\zeta^4+K\zeta^2+1} d\zeta - \int_0^1 \frac{2}{\zeta^2+1} d\zeta \right\} \\
 &= -\frac{Q}{\pi} \left\{ (K+\sqrt{K^2-4}) \int_0^1 \frac{2}{\zeta^2+\frac{K+\sqrt{K^2-4}}{2}} d\zeta \right. \\
 &\quad \left. + (K-\sqrt{K^2-4}) \int_0^1 \frac{1}{\zeta^2+\frac{K+\sqrt{K^2-4}}{2}} d\zeta - 4 \int_0^1 \frac{1}{\zeta^2+1} d\zeta \right\} \\
 &= -\frac{Q}{\pi} \left\{ (\sqrt{K+2}+\sqrt{K-2}) \left[ \tan^{-1} \frac{\zeta}{\sqrt{c}} \right]_0^1 \right. \\
 &\quad \left. + (\sqrt{K+2}-\sqrt{K-2}) \left[ \tan^{-1} \frac{\zeta}{\sqrt{c'}} \right]_0^1 - 4 \left[ \tan^{-1} \zeta \right]_0^1 \right\}
 \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
 \sqrt{K+2} &= \sqrt{U_0^2+U_0^{-2}+2} = U_0+U_0^{-1} \\
 \sqrt{K-2} &= \sqrt{U_0^2+U_0^{-2}-2} = U_0-U_0^{-1} \\
 \frac{1}{\sqrt{c}} &= \frac{(\sqrt{K+2}+\sqrt{K-2})(K-\sqrt{K^2-4})}{4} = U_0^{-1} \\
 \frac{1}{\sqrt{c'}} &= \frac{(\sqrt{K+2}-\sqrt{K-2})(K+\sqrt{K^2-4})}{4} = U_0
 \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
 &= \frac{Q}{\pi} \left\{ U_0 \left( \pi - 2 \tan^{-1} \frac{1}{U_0} \right) + \frac{1}{U_0} \left( \pi - 2 \tan^{-1} U_0 \right) - \pi \right\} \\
 &= \frac{Q}{\pi} \times \frac{\pi}{U_0} \left\{ \left( 1 - U_0 \right) \left[ 1 - \frac{2}{\pi} \left( 1 - U_0 \right) \tan^{-1} U_0 \right] \right\} \quad (14)
 \end{aligned}$$

となる。ここで  $Q=H \times U_0$  であり、かつ、風洞の高さ  $H$  で平板の高さ  $h$  を無次元化した値を  $y_{BC}$  とし、さらにはく離流線上の速度  $U_C$  を用いると

$$y_{BC} = \frac{h}{H} = \left( 1 - \frac{1}{U_C} \right) \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \left( 1 - \frac{1}{U_C} \right) \tan^{-1} \frac{1}{U_C} \right\} \quad (15)$$

となる。式(15)がはく離流線上の速度と平板の高さとの関係を示すものである。この計算結果を図6に示してある。明らかに平板の高さが大きくなるにしたがって、はく離流線上の速度が増加していることが認められる。

### 3. 平板の先端からはく離する流線に関する実験

#### 3-1 実験装置およびその方法

実験装置は前報に示した断面 600 mm × 600 mm、長さ 5400 mm の試験断面を有する低速環流型風洞を使用した。一方、供試平板は長さ 600 mm で高さ 100 mm, 75 mm, 50 mm, 25 mm

なる4種類であり、いずれも真鍮製で前面および背面に圧力測定孔を有している。試験断面に沿う主流速度は天井壁の形状を適当に調整することによって一定となるようにしてある。風洞入口より1200 mm下流の位置にこれらの平板を設置し、平板前面および背面の圧力分布と平板の下流 $2h$ ,  $4h$ , ...  $12h$ における6断面上で速度分布を測定した。これらの圧力分布および速度分布をもとにして、平板の抗力と平板の先端からはく離する流線を、第1報で説明した方法と同様の手法で算定した。

3-2 はく離流線上の速度およびその形状

平板後方の速度分布を用いて算定

したはく離流線上の速度を図7に示してある。縦軸ははく離流線上の速度 $U_c$ を $y=0\sim h$ 間の平均速度 $\bar{u}$ によって無次元化した $U_c/\bar{u}$ とし、横軸には $h/H$ を採用してある。この結果から明らかのように平板の高さが大きくなるにしたがい、はく離流線上の速度は増加している。こ

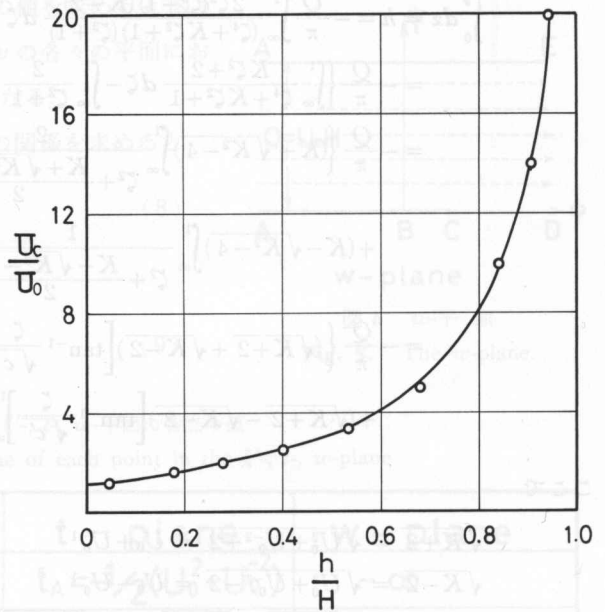


図6 はく離流線上の理論速度

Fig. 6. Theoretical velocity on the separated streamline

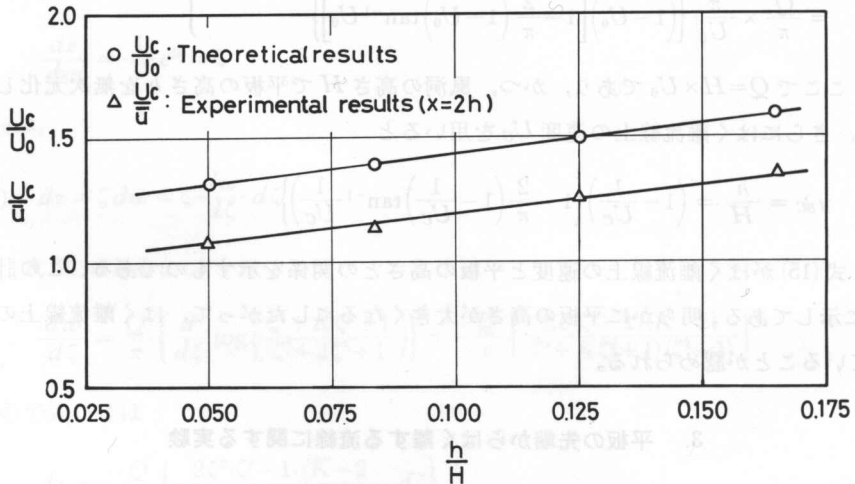


図7  $h/H$ に対するはく離流線上の速度の変化

○: 理論値, △: 実験値

Fig. 7. Variation of velocity on the separated stream lines with  $h/H$ .

○: theoretical results, △: experimental results.

で認められる理論と実験値との不一致は、自由流線理論の仮定および実験における境界層の存在などに起因するものと思われる。図8は前報と同様の方法で算定したはく離流線の形状を示したものである。この結果から平板の高さが大きくなるにしたがって、平板先端からはく離す  $x$  方向となす角  $\theta$  は大きくなるが、平板後方に形成される渦の大きさは小さくなる傾向を示す流線のこと明らかとなった。

### 3-3 平板表面上の圧力分布およびその抗力

図9は平板の高さを変化させたときの平板の前面および背面に働く圧力分布を示したものである。まず、平板前面に働く圧力は  $h/H$  の変化によって大きな影響は受けないが、背面の負圧を示す圧力は  $h/H$  の変化によって大きくかわり、平板の高さが大きくなるにしたがって、増加することが明らかとなった。このことは前節で記述したようにはく離流線上の速度が平板の高さが大きくなるにしたがって、増加するという現象に起因するものと思われる。図10は

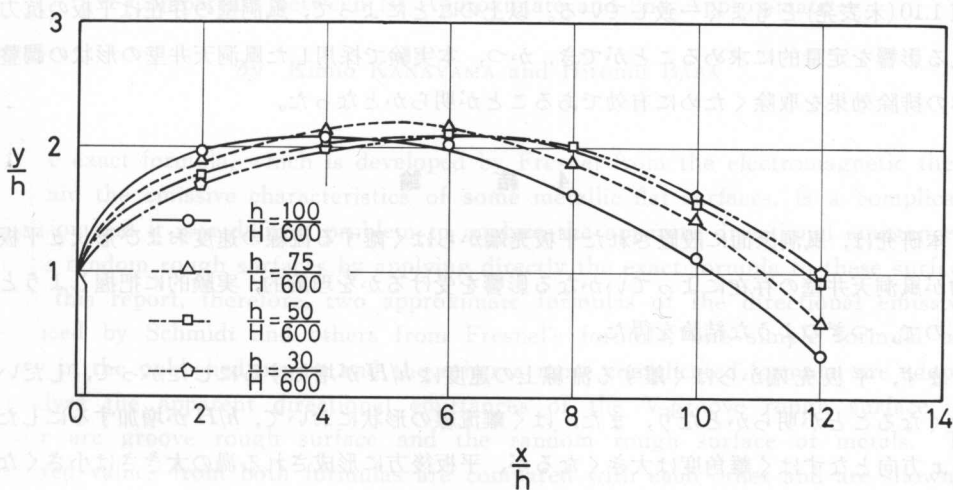


図8  $h/H$  に対するはく離流線形状の変化

Fig. 8. Variation of the separated streamline shapes with  $h/H$ .

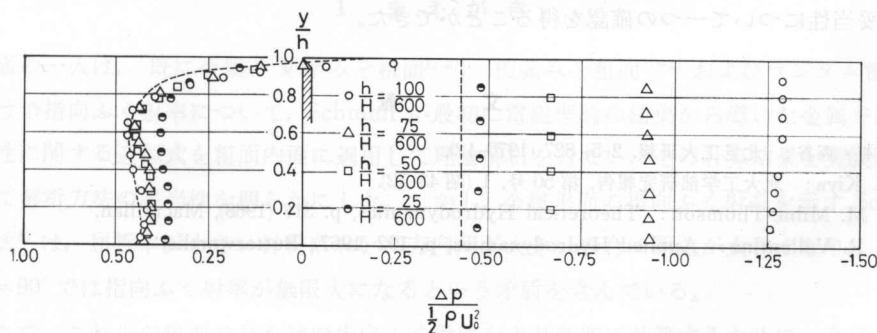


図9  $h/H$  に対する平面表面上の圧力分布の変化

Fig. 9. Variation of pressure distribution on the surface of the flat-plate with  $h/H$ .

縦軸に  $y=0\sim h$ 間の平均動圧  $\bar{q}$  を用いた抗力係数  $\bar{C}_D$ 、横軸に  $h/H$  をそれぞれ採用したものである。この結果より  $h/H$  が大きくなるにしたがって、 $\bar{C}_D$  の値はしだいに増加し、 $h/H=1/6$  の場合には  $h/H=1/20$  に比べ約 1.5 倍の値を示すことが明らかとなった。一方、図に示した  $h/H=0$  なるときの  $\bar{C}_D$  の値は本実験で採用した風洞の天井壁を移動させ、その影響をとりのぞいた場合であり、約 1.1 で Ranga と Grarde の求めた値と比較的よく一致しており、北大工学部流体工学研究での測定値 1.10 (未発表) ともよく一致している。以上のことよって、風洞壁の存在は平板の抗力に与える影響を定量的に求めることができ、かつ、本実験で採用した風洞天井壁の形状の調整は物体の排除効果を取除くために有効であることが明らかとなった。

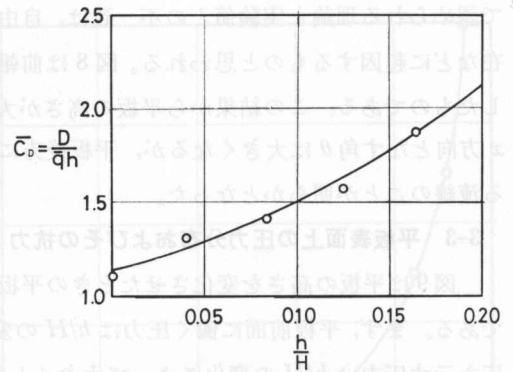


図 10  $h/H$  に対する抗力係数の変化

Fig. 10. Variation of the drag coefficients with  $h/H$ .

#### 4. 結 論

本研究は、風洞床面に設置された平板先端からはく離する流線の速度および形状と平板の抗力が風洞天井壁の存在によっていかなる影響を受けるかを理論的、実験的に把握しようとしたもので、つぎのような結論を得た。

まず、平板先端からはく離する流線上の速度は  $h/H$  が増加するにしたがって、しだいに大きくなることが明らかとなり、また、はく離流線の形状において、 $h/H$  が増加するにしたがい、 $x$  方向となすはく離角度は大きくなるが、平板後方に形成される渦の大きさは小さくなる傾向を示すことが判明した。さらに風洞天井壁の存在が平板の抗力に与える影響を定量的に求め、かつ物体の排除効果を除去するため、風洞壁形状の調整を行なって圧力勾配を取除く実験手法の妥当性について一つの確認を得ることができた。

#### 文 献

- 1) 坂本・森谷：北見工大研報，2-5，827 (1970-12)。
- 2) M. Kiya：北大工学部研究報告，第 50 号，1 (昭 43-12)。
- 3) L. M. Milne-Thomson：Theoretical Hydrodynamics, p. 317 (1968), Macmillan.
- 4) H. R. Vallentine：Applied Hydrodynamics, p. 192 (1967), Butterworths.