

# Rat Race 回路の研究 (その2)

— Rat Race 回路の種々の変形\* —

品 田 雄 治\*\*

(昭和46年3月12日受理)

## Modification of the Rat Race Circuit

by Yūji SHINADA

The Rat Race circuit is a four-port made of a loop of a transmission line. Only one side of the four sides of the loop has transmission in opposite phase as compared with the other three sides.

The phase difference of four right angles or the multiple has no practical significance. With this in mind, a variety of modifications to the basic form of the Rat Race circuit is introduced. This technique brings out larger sizes for the Rat Race circuit as well as modifications of the terminating immittances and power distribution ratios.

Further development is obtained by the diagonalization of the image immittance matrices of the Rat Race circuit. This technique shows the possibility of broadbanding of the performance of the Rat Race circuit.

### 1. 緒 言

Rat Race 回路は線路ループ上に四つのポートを設けたもので、使用周波数帯の中心ではループの四辺のうち一辺だけが他の三辺と逆位相の伝送をなすものである。

位相量だけが四直角またはその整数倍の差のある二つの回路は同様の働きをする。このことから Rat Race 回路には種々の変形を導入することができる。その結果回路の大形化が可能となり、また終端イミタンスや電力配分比も種々のものが得られるであろう。

回路の「大形化」ということばは「小形化」の時代に奇妙な感じを与えるかも知れないが、使用周波数が高くなるに伴い、これに使われる Rat Race 回路の寸法がしだいに小さくなり製作に困難を生ずるほどであり、大形化は使用周波数の上昇を許す一つの手段となると考えられる。

### 2. Rat Race 回路の基本形とその変形

Rat Race 回路の基本形を図-1に示す。ここでポート  $a_1 \sim b_2$  間,  $b_2 \sim a_2$  間,  $a_2 \sim b_1$  間の

\* 昭和45年度電子通信学会全国大会(昭45.8, 東京)

\*\* 北見工業大学電気工学科

線路長は  $l$ ，ポート  $a1 \sim b2$  間の線路長は  $3l$  とし， $l$  が四分の一波長になるような周波数（これを中心周波数と呼ぶ）およびその近傍で使用する。中心周波数ではループの下部三辺は同じ位相量（直角）を，上部の一辺はそれよりも二直角だけ多い位相量をもつ。

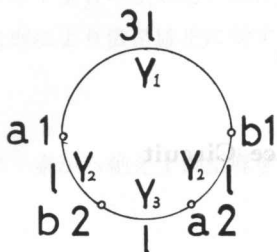


図-1 基本 Rat Race 回路  
Fig. 1 Basic Rat Race circuit.

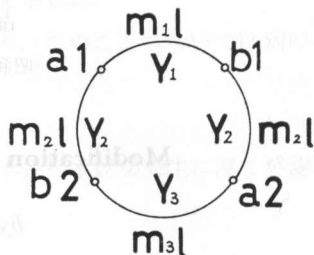


図-2 Rat Race 回路の一般的な変形  
Fig. 2 General modification of the Rat Race circuit.

普通はループを平滑 ( $Y_1 = Y_2 = Y_3 = Y_0$ ) に作り，終端アドミタンスは  $\sqrt{2} Y_0$  とする。

この考えを一般化して図-2の回路が考えられる。ここに

- (i)  $m_1, m_2, m_3$  はいずれも正の奇数
- (ii)  $m_1 = m_3 \pm 2$
- (iii)  $m_2 = m_3 \pm 4n, n = 0, 1, 2, \dots$

とする。基準長  $l$  は使用周波数帯の中心で線路上の波長の四分の一にとる。

条件 (ii) より  $m_1$  と  $m_3$  は連続した奇数であるからたがい素であり，したがって  $m_1, m_2, m_3$  は共通因数を持たない。

条件 (iii) は四直角またはその整数倍の位相差は無きに等しいことに相当する。

### 3. 平滑な場合の動作

この回路を平滑 ( $Y_1 = Y_2 = Y_3 = Y_0$ ) なものとすれば，そのアドミタンス行列  $\mathbf{Y}$  はつぎのようになる。

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_{aa} & Y_{ab} \\ Y_{ba} & Y_{bb} \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$\mathbf{Y}_{aa} = \begin{bmatrix} Y_{11} & 0 \\ 0 & Y_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{Y}_{bb} = \begin{bmatrix} Y_{33} & 0 \\ 0 & Y_{44} \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\left. \begin{aligned} Y_{11} &= Y_0(\coth m_1 \tilde{\gamma} l + \coth m_2 \tilde{\gamma} l) \\ Y_{22} &= Y_0(\coth m_2 \tilde{\gamma} l + \coth m_3 \tilde{\gamma} l) \end{aligned} \right\} \tag{3}$$

$$\mathbf{Y}_{ab} = \begin{bmatrix} Y_{13} & Y_{14} \\ Y_{23} & Y_{24} \end{bmatrix} = \mathbf{Y}_{ba} = \begin{bmatrix} Y_{13} & Y_{23} \\ Y_{14} & Y_{24} \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\left. \begin{aligned} Y_{13} &= -Y_0 \operatorname{cosech} m_1 \gamma l \\ Y_{14} &= Y_{23} = -Y_0 \operatorname{cosech} m_2 \gamma l \\ Y_{24} &= -Y_0 \operatorname{cosech} m_3 \gamma l \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここに  $\gamma = j\beta$  は Rat Race 回路を構成する線路の伝搬定数である。いま

$$\lambda \equiv \tanh \gamma l \quad (6)$$

とおけば、中心周波数の近傍で上記の  $Y_{ij}$  はつぎのように近似される。

$$\left. \begin{aligned} Y_{11} &\cong (m_1 + m_2) \lambda^{-1} Y_0 \\ Y_{22} &\cong (m_2 + m_3) \lambda^{-1} Y_0 \\ Y_{13} &\cong \pm j Y_0 \\ Y_{14} &= Y_{23} = Y_{24} \cong \mp j Y_0 \quad (\text{複号同順}) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Rat Race 回路の基本形におけると同様に各ポートの終端アドミタンスを  $\sqrt{2} Y_0$  とすると、 $a$  側ポート ( $a1, a2$ ) から見た入力アドミタンス  $\mathbf{Y}_{ai}$  は

$$\mathbf{Y}_{ai} = \begin{bmatrix} Y_{ai11} & Y_{ai12} \\ Y_{ai12} & Y_{ai22} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} Y_{ai11} &\cong \sqrt{2} Y_0 \pm \lambda^{-1} Y_0 \\ Y_{ai12} &\cong \pm \lambda^{-1} Y_0 \\ Y_{ai22} &\cong \sqrt{2} Y_0 \mp \lambda^{-1} Y_0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ここで複号は  $m_1 - m_3 = \pm 2$  の複号と同順にとるものとする。 $\mathbf{Y}_{ai}$  を書き換えると

$$\mathbf{Y}_{ai} = \sqrt{2} Y_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \pm \lambda^{-1} Y_0 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

この式の右辺は  $m_1, m_2, m_3$  を含まないので、 $m_1, m_2, m_3$  が前記の仮定に従う限り  $\mathbf{Y}_{ai}$  は中心周波数の近傍で一次近似だけをとれば、 $m_1, m_2, m_3$  に無関係で、整合の度合も分離の度合も基本形の回路のそれらと同等になる。 $m_1, m_2, m_3$  を大きくとれば、ループの全長が長くなり回路は大形となるが、 $m_1, m_2, m_3$  が前記三条件を満足する限り、中心周波数の近傍で特性は悪くならない。

つぎに一つのポート、例えばポート  $a1$  または  $a2$  からの入力に対する出力の電力配分比を考える。各ポートの電圧を  $V_{a1}, V_{a2}, V_{b1}, V_{b2}$  とし、各ポートから回路に入る電流を  $I_{a1}, I_{a2}, I_{b1}, I_{b2}$  としてそれらの関係を縦続行列を用いて示す。

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} V_{a1} \\ V_{a2} \end{bmatrix} &= \mathbf{A} \begin{bmatrix} V_{b1} \\ V_{b2} \end{bmatrix} - \mathbf{B} \begin{bmatrix} I_{b1} \\ I_{b2} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} I_{a1} \\ I_{a2} \end{bmatrix} &= \mathbf{C} \begin{bmatrix} V_{b1} \\ V_{b2} \end{bmatrix} - \mathbf{D} \begin{bmatrix} I_{b1} \\ I_{b2} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ここに  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  は 2 行 2 列の行列で  $\mathbf{Y}$  の部分行列との間につきの関係がある。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A} &= -\mathbf{Y}_{ba}^{-1}\mathbf{Y}_{bb}, & \mathbf{B} &= -\mathbf{Y}_{ba}^{-1} \\ \mathbf{C} &= -\mathbf{Y}_{aa}\mathbf{Y}_{ba}^{-1}\mathbf{Y}_{bb} + \mathbf{Y}_{ab}, & \mathbf{D} &= -\mathbf{Y}_{aa}\mathbf{Y}_{ba}^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

中心周波数では  $\mathbf{Y}_{aa}$ ,  $\mathbf{Y}_{bb}$  は零行列となるから,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{D}$  も零行列となり, 電圧伝送係数  $\mathbf{N}$ , 電流伝送係数  $\mathbf{M}$  はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{N} &= \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{Y}_{bl} = \mathbf{B}\mathbf{Y}_{bl} \\ \mathbf{M} &= \mathbf{D} + \mathbf{C}\mathbf{Z}_{bl} = \mathbf{C}\mathbf{Z}_{bl} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

ここに  $\mathbf{Y}_{bl}$ ,  $\mathbf{Z}_{bl}$  は  $b$  端の終端アドミタンス, 終端インピーダンスであって, これらは基本形の Rat Race 回路におけると同様に

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Y}_{bl} &= \text{diag} [\sqrt{2}Y_0, \sqrt{2}Y_0] \\ \mathbf{Z}_{bl} = \mathbf{Y}_{bl}^{-1} &= \text{diag} [Z_0/\sqrt{2}, Z_0/\sqrt{2}] \quad Z_0 = 1/Y_0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

とするならば

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{N} &= \sqrt{2}Y_0\mathbf{B} \\ \mathbf{M} &= \frac{1}{\sqrt{2}}Z_0\mathbf{C} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

ゆえに

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{N}^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}Z_0\mathbf{B}^{-1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}Z_0\mathbf{Y}_{ba} \\ \mathbf{M}^{-1} &= \sqrt{2}Y_0\mathbf{C}^{-1} = \sqrt{2}Y_0\mathbf{Y}_{ab}^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

ここに

$$\mathbf{Y}_{ba} = \pm jY_0 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

を代入すると

$$\mathbf{N}^{-1} = \mp j \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

この  $\mathbf{N}^{-1}$  は  $\mathbf{V}_b = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{V}_a$  により  $a$  端入力電圧と  $b$  端出力電圧との関係を与えるもので, 式(18)から入力電圧  $V_{a1}$  に対しては出力電圧  $V_{b1}$  と  $V_{b2}$  との比は  $1:(-1)$  となり, 入力電圧  $V_{a2}$  に対しては出力電圧  $V_{b1}$  と  $V_{b2}$  との比は  $1:1$  となることがわかる。このことも  $m_1, m_2, m_3$  が前記三条件を満足する限り  $m_1, m_2, m_3$  に無関係に成り立つ。いずれにしても電力配分比は  $1:1$  であるが,  $a1$  からの入力に対しては逆相,  $a2$  からの入力に対しては同相の出力となる。

考えている回路は対称であるから,  $a$  端と  $b$  端をとり換えても同様のことがいえる。

## 4. 平滑でない場合の動作

ループの各辺の特性アドミタンス  $Y_1, Y_2, Y_3$  が等しくない場合を考える。それでも中心周波数での動作については、 $\mathbf{A}$  は零行列であるから  $b$  端の終端アドミタンス

$$\mathbf{Y}_{bl} = \text{diag} [Y_b, Y_b] \quad (19)$$

に対して  $a$  端の入力アドミタンスは

$$\mathbf{Y}_{al} = -\mathbf{Y}_{ba}\mathbf{Y}_{bl}^{-1}\mathbf{Y}_{ba} = -\mathbf{Y}_{bl}^{-1}\mathbf{Y}_{ba}^2 \quad (20)$$

しかるに中心周波数では

$$\mathbf{Y}_{ba} = \begin{bmatrix} Y_{13} & Y_{23} \\ Y_{14} & Y_{24} \end{bmatrix} = \pm j \begin{bmatrix} -Y_1 & Y_2 \\ Y_2 & Y_3 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\therefore \mathbf{Y}_{ba}^2 = - \begin{bmatrix} Y_1^2 + Y_2^2 & Y_2(Y_3 - Y_1) \\ Y_2(Y_3 - Y_1) & Y_2^2 + Y_3^2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$a$  端の両ポート  $a1, a2$  間の分離の条件は入力アドミタンス  $\mathbf{Y}_{al}$  が対角行列となることであり、そのためには  $\mathbf{Y}_{ba}^2$  が対角行列とならなければならない。その条件は

$$Y_1 = Y_3 \quad (23)$$

このとき

$$\mathbf{Y}_{ba}^2 = - \text{diag} [Y_1^2 + Y_2^2, Y_1^2 + Y_2^2] \quad (24)$$

したがって

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{al} &= \text{diag} \left[ \frac{Y_1^2 + Y_2^2}{Y_b}, \frac{Y_1^2 + Y_2^2}{Y_b} \right] \\ &= \text{diag} [Y_a, Y_a] \end{aligned} \quad (25)$$

$$\therefore Y_a \cdot Y_b = Y_1^2 + Y_2^2 \quad (26)$$

この関係はやはり  $m_1, m_2, m_3$  を含んでいない。そして  $Y_a$  と  $Y_b$  は反比例することを示している。 $a$  端と  $b$  端の終端条件を対称、すなわち  $Y_a = Y_b$  とするには

$$Y_a = Y_b = \sqrt{Y_1^2 + Y_2^2} \quad (27)$$

つぎに出力配分比について考える。分離の条件 ( $Y_1 = Y_3$ ) のもとでは、中心周波数で

$$\mathbf{Y}_{ba} = \pm j \begin{bmatrix} -Y_1 & Y_2 \\ Y_2 & Y_1 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$b$  端の終端インピーダンス行列を  $\text{diag} [Z_b, Z_b]$  とすると、式(16)を求めたときと同様にして

$$\mathbf{N}^{-1} = -Z_b \mathbf{Y}_{ba} = \mp j Z_b \begin{bmatrix} -Y_1 & Y_2 \\ Y_2 & Y_1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

ゆえにポート  $a1$  からの入力に対して出力は逆相で  $Y_1^2:Y_2^2$  の比をなし、ポート  $a2$  からの入力に対して出力は同相で  $Y_2^2:Y_1^2$  の比をなす。この二つの電力配分比がたがいに逆数であることは注目に値する。

終端アドミタンスを式(27)で与えられる値にしたとき、入力アドミタンスは中心周波数近傍で

$$Y_{ai} \cong \begin{bmatrix} \sqrt{Y_1^2+Y_2^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{Y_1^2+Y_2^2} \end{bmatrix} \pm \frac{2Y_1Y_2}{(Y_1^2+Y_2^2)\lambda} \begin{bmatrix} Y_2 & Y_1 \\ Y_1 & -Y_2 \end{bmatrix} \quad (30)$$

となる。ポート  $a1, a2$  での反射係数  $\rho_1, \rho_2$  は中心周波数の近傍ではほとんど等しい。 $Y_2/Y_1$  を小にすると整合度は改善されるが分離度は悪くなる。逆に  $Y_1/Y_2$  を小にすると分離度は改善されるが、整合度は悪くなる。

### 5. ハイブリッド作用のなくなる周波数

中心周波数ではループの各辺の電気角は直角の奇数倍となるが、中心周波数から離れると各辺の電気角もしだいに直角の奇数倍から離れていき、最長の辺の電気角が最初に直角の偶数倍となる。

ループの四辺のどれかの電気角  $m_i\beta l (i=1, 2, 3)$  が直角の偶数倍であったとすると、その電気角の双曲余接 ( $\coth$ ) および双曲余割 ( $\operatorname{cosech}$ ) は無限大となり、それらを含む  $\mathbf{Y}$  行列も、その  $\mathbf{Y}$  行列から導かれる縦続行列も特殊の形となる。

(1) ループの各辺  $m_1l, m_2l, m_3l$  のうちの最長のものが  $m_1l$  であるとする。その辺の中心周波数  $f_0$  での電気角は  $m_1\pi/2$  である。この電気角より少なく、これに最も近い  $\pi/2$  の偶数倍の角は  $(m_1-1)\pi/2$  である。そのような電気角を与える周波数  $f_1$  は次式で与えられる。

$$f_1 = \frac{m_1-1}{m_1} f_0 \quad (31)$$

これは無損失線路の位相定数が周波数に比例するからである。またこの  $f_1$  におけるループの各辺の電気角は

$$\left. \begin{aligned} m_1l \cdots \cdots m_1\beta_1l &= (m_1-1) \frac{\pi}{2} \\ m_2l \cdots \cdots m_2\beta_1l &= \frac{m_2}{m_1} (m_1-1) \frac{\pi}{2} \\ m_3l \cdots \cdots m_3\beta_1l &= \frac{m_3}{m_1} (m_1-1) \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

ここに  $\beta_1$  は周波数  $f_1$  における線路の位相定数である。

式(1)~(5)に上記の関係を代入し

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A} &= -\mathbf{Y}_{ba}^{-1}\mathbf{Y}_{bb}, & \mathbf{A}^{-1} &= -\mathbf{Y}_{bb}^{-1}\mathbf{Y}_{ba} \\ \mathbf{B} &= -\mathbf{Y}_{ba}^{-1}, & \mathbf{D} &= \mathbf{D}' \quad (' \text{は転置}) \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

から部分縦続行列  $\mathbf{A}$  およびその逆行列  $\mathbf{A}^{-1}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D}$  を求める。 $\mathbf{A}$  および  $\mathbf{A}^{-1}$  はその (1, 2) 要素が零となり,  $\mathbf{D}$  はその (2, 1) 要素が零となり,  $\mathbf{B}$  はその (1, 1), (1, 2), (2, 1) 要素が零となる。それゆえ  $b$  端の任意の終端に対して  $V_{a2}$  も  $I_{a2}$  も  $V_{b1}$  に影響を与えない。同様に回路の対称性から,  $a$  端の任意の終端に対して  $V_{b2}$  も  $I_{b2}$  も  $V_{a1}$  に影響を与えない。このことは, この周波数  $f_1$  ではもはやハイブリッド回路としての働きを失っていることを意味する。

(2) ループの各辺  $m_1l$ ,  $m_2l$ ,  $m_3l$  のうちの最長のものが  $m_3l$  のみであったとする。この場合には (1) の場合にくらべて上下を取り換えただけのことになるので,  $f_1$  においては  $a$  端の任意の終端に対して  $V_{b1}$  も  $I_{b1}$  も  $V_{a2}$  に影響を与えず,  $b$  端の任意の終端に対して  $V_{a1}$  も  $I_{a1}$  も  $V_{b2}$  に影響を与えない。

(3) ループの各辺のうち  $m_2l$ ,  $m_3l$  が等しくて  $m_1l$  よりも長い場合には,  $f_1$  において行列  $\mathbf{A}$  の (1, 1) 要素が零で, かつ  $\mathbf{B}$  は零行列となる。ゆえに  $b$  端の任意の有限インピーダンス終端に対して,  $f_1$  では  $\mathbf{V}_a = \mathbf{A}\mathbf{V}_b$  となりポート  $a1$ ,  $b1$  間の直接の伝送はなくなる。

(4) ループの各辺のうち  $m_2l$  が最長のときは  $\mathbf{A}$  の両対角要素が零で,  $\mathbf{B}$  は零行列となる。それゆえポート  $a1$ ,  $b1$  間も,  $a2$ ,  $b2$  間も伝送がなくなる。

このように (1), (2), (3), (4) のどの場合でも, ループの最長辺の電気角が直角の偶数倍となる周波数では, ある組のポート間の伝送がなくなるのでハイブリッドとしての働きをしなくなる。ゆえに不整合の度合や分離度の低下をどれほど許しても, ハイブリッドとして有用な伝送周波数帯域幅は,  $2(f_0 - f_1)$  を越すようにすることはできない。

この見地から広帯域伝送のためには, ループの最長辺をあまり長くしない方がよい。

## 6. 映像イミタンスの公称値

映像イミタンス行列  $\mathbf{Z}_{0a}$ ,  $\mathbf{Z}_{0b}$ ,  $\mathbf{Y}_{0a}$ ,  $\mathbf{Y}_{0b}$  はつぎの条件を満足する。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Z}_{0a}\mathbf{Y}_{aa}\mathbf{Z}_{0a} &= \mathbf{Z}_{aa}, & \mathbf{Z}_{0b}\mathbf{Y}_{bb}\mathbf{Z}_{0b} &= \mathbf{Z}_{bb} \\ \mathbf{Y}_{0a}\mathbf{Z}_{aa}\mathbf{Y}_{0a} &= \mathbf{Y}_{aa}, & \mathbf{Y}_{0b}\mathbf{Z}_{bb}\mathbf{Y}_{0b} &= \mathbf{Y}_{bb} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

$$(\mathbf{Z}_{0a}\mathbf{Y}_{aa})^2 = \mathbf{Z}_{aa}\mathbf{Y}_{aa}$$

$$\therefore \mathbf{Z}_{0a} = (\mathbf{Z}_{aa}\mathbf{Y}_{aa})^{\frac{1}{2}}\mathbf{Y}_{aa}^{-1} \quad (35)$$

ループを平滑 ( $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_2 = \mathbf{Y}_3 = \mathbf{Y}_0$ ) と仮定する。

(i)  $m_1 = 2m + 1$ ,  $m_2 = m_3 = 2m - 1$  とすると中心周波数において

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Z}_{0a} = \mathbf{Z}_{0b} &= \frac{\mathbf{Z}_0}{2\sqrt{32m^2 - 16m + 1}} \begin{bmatrix} 8m - 3 & -1 \\ -1 & 8m - 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{Y}_{0a} = \mathbf{Y}_{0b} &= \frac{\mathbf{Y}_0}{\sqrt{32m^2 - 16m + 1}} \begin{bmatrix} 8m - 1 & 1 \\ 1 & 8m - 3 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

表-1 変形平滑ループハイブリッド回路の映像アドミタンス値

Table 1 Values of the image admittances of the smooth-modified loop hybrid circuit.

$m_1$	$m_2$	全 長	$Y_{0a11}/Y_0$	$Y_{0a22}/Y_0$	$Y_{0a12}/Y_0$
3	1	$6l$	1.6977494	1.2126781	0.2425356
1	3	$10l$	1.2857143	1.5714286	-0.1428571
5	3	$14l$	1.5230192	1.3199500	0.1015346
3	5	$18l$	1.3397877	1.4974098	-0.0788110
7	5	$22l$	1.4815602	1.3527289	0.0644156
5	7	$26l$	1.3618367	1.4707837	-0.0544735
9	7	$30l$	1.4629804	1.3685946	0.0471929
7	9	$34l$	1.3738080	1.4570690	-0.0416305
11	9	$38l$	1.4524359	1.3779520	0.0372419
9	11	$42l$	1.3813251	1.4487068	-0.0336908

(ii)  $m_1=2m-1$ ,  $m_2=m_3=2m+1$  とすると中心周波数において

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Z}_{0a} = \mathbf{Z}_{0b} &= \frac{Z_0}{2\sqrt{32m^2+16m+1}} \begin{bmatrix} 8m+3 & 1 \\ 1 & 8m+1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{Y}_{0a} = \mathbf{Y}_{0b} &= \frac{Y_0}{\sqrt{32m^2+16m+1}} \begin{bmatrix} 8m+1 & -1 \\ -1 & 8m+3 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

$m_1, m_2(=m_3)$  に種々の値を与えると映像アドミタンス行列の対角要素, 非対角要素の値は表-1 になる。表-1 から  $m_1, m_2$  を大きくすると  $\mathbf{Y}_{0a}, \mathbf{Y}_{0b}$  は次第に  $\text{diag}[\sqrt{2}Y_0, \sqrt{2}Y_0]$  に近づく。しかもその極限值との差は大体ループの全長に反比例する。そのため大形化しても中心周波数の近傍での動作の諸特性が悪くないのだと解釈することができる。

## 6. 映像イミタンス行列の対角化

中心周波数における映像イミタンス行列が対角行列になるように  $Y_1$ , または  $Y_3$  をえらぶことを考える。

中心周波数の近傍では

$$\left. \begin{aligned} Y_{11} = Y_{33} &\cong \lambda^{-1}(m_1 Y_1 + m_2 Y_2) \\ Y_{22} = Y_{44} &\cong \lambda^{-1}(m_2 Y_2 + m_3 Y_3) \\ Y_{13} &\cong \pm j Y_1 \\ Y_{14} = Y_{23} &\cong \mp j Y_2 \\ Y_{24} &\cong \mp j Y_3 \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

$b$  端開放に対する  $a$  端入力アドミタンスは

$$\mathbf{Y}_{af} = \begin{bmatrix} Y_{af11} & Y_{af12} \\ Y_{af12} & Y_{af22} \end{bmatrix} \quad (39)$$



$$\left. \begin{aligned} Y_{af11} &= Y_{11} - \frac{Y_{13}^2}{Y_{33}} - \frac{Y_{14}^2}{Y_{44}} \\ Y_{af12} &= -\frac{Y_{13}Y_{23}}{Y_{33}} - \frac{Y_{14}Y_{24}}{Y_{44}} \\ Y_{af22} &= Y_{22} - \frac{Y_{23}^2}{Y_{33}} - \frac{Y_{24}^2}{Y_{44}} \end{aligned} \right\} (40)$$

$Y_{aa}$  は対角行列であるから影像イミタンス行列を対角行列にするためには  $Y_{af}$  を対角行列にすればよい。そのためには

$$\frac{Y_{13}}{Y_{33}} + \frac{Y_{24}}{Y_{44}} = 0 \quad (41)$$

これに式(35)を代入すると

$$\frac{Y_1}{m_1 Y_1 + m_2 Y_2} = \frac{Y_3}{m_2 Y_2 + m_3 Y_3} \quad (42)$$

この条件のもとで影像アドミタンス行列  $Y_{0a}$  は中心周波数で対角行列となり、その対角要素は

$$\left. \begin{aligned} Y_{0a11} &= \sqrt{\frac{Y_1}{Y_3} (Y_2^2 + Y_1 Y_3)} \\ Y_{0a22} &= \sqrt{\frac{Y_3}{Y_1} (Y_2^2 + Y_1 Y_3)} \end{aligned} \right\} (43)$$

$b$  端の影像アドミタンス行列  $Y_{0b}$  についても同じ式を得る。

電圧伝送係数  $N$  は  $b$  端の終端アドミタンス  $Y_{0b}$  に対して

$$\left. \begin{aligned} N &= \mathbf{B}Y_{0b} = - \begin{bmatrix} \pm j Y_1 & \mp j Y_2 \\ \mp j Y_2 & \mp j Y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Y_{0b11} & 0 \\ 0 & Y_{0b22} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{Y_2^2 + Y_1 Y_3} \begin{bmatrix} \pm j Y_3 & \mp j Y_2 \\ \mp j Y_2 & \mp j Y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{0b11} & 0 \\ 0 & Y_{0b22} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{Y_2^2 + Y_1 Y_3} \begin{bmatrix} \pm j Y_3 Y_{0b11} & \mp j Y_2 Y_{0b22} \\ \mp j Y_2 Y_{0b11} & \mp j Y_1 Y_{0b22} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} (44)$$

ポート  $a1$  からの入力に対してポート  $b1, b2$  の出力電圧の比は

$$\frac{V_{b1}}{V_{b2}} = -\frac{N_{22}}{N_{21}} = -\frac{Y_1}{Y_2} \frac{Y_{0b22}}{Y_{0b11}} = -\frac{Y_3}{Y_2} \equiv -\frac{1}{r_1} \quad (45)$$

またポート  $a2$  からの入力に対してポート  $b1, b2$  の出力電圧の比は

$$\frac{V_{b1}}{V_{b2}} = -\frac{N_{12}}{N_{11}} = \frac{Y_2 Y_{0b22}}{Y_3 Y_{0b11}} = \frac{Y_2}{Y_1} \equiv r_2 \quad (46)$$

ループの四辺のうち下方の三辺を平滑 ( $Y_2 = Y_3$ ) とすれば  $r_1 = 1$  となり式(42)から

$$Y_2 = \frac{m_2 + m_3 - m_1}{m_2} Y_1 \quad (47)$$

ゆえに

$$r_2 = \frac{m_2 + m_3 - m_1}{m_2} \quad (48)$$

またループの四辺のうち上方の三辺を平滑 ( $Y_1 = Y_2$ ) とすると,  $r_2 = 1$  となり式 (39) から

$$Y_2 = \frac{m_1 + m_2 - m_3}{m_2} Y_3 \quad (49)$$

ゆえに

$$r_1 = \frac{m_1 + m_2 - m_3}{m_2} \quad (50)$$

(i)  $m_1 = m_3 + 2$  のときは

(ia)  $Y_2 = Y_3$  なら

$$r_1 = 1, \quad Y_2 = \frac{m_2 - 2}{m_2} Y_1, \quad r_2 = \frac{m_2 - 2}{m_2} \quad (51)$$

(ib)  $Y_1 = Y_2$  なら

$$r_2 = 1, \quad Y_2 = \frac{m_2 + 2}{m_2} Y_3, \quad r_1 = \frac{m_2 + 2}{m_2} \quad (52)$$

(ii)  $m_1 = m_3 - 2$  のときは

(ia)  $Y_2 = Y_3$  なら

$$r_1 = 1, \quad Y_2 = \frac{m_2 + 2}{m_2} Y_1, \quad r_2 = \frac{m_2 + 2}{m_2} \quad (53)$$

(ib)  $Y_1 = Y_2$  なら

$$r_2 = 1, \quad Y_2 = \frac{m_2 - 2}{m_2} Y_3, \quad r_1 = \frac{m_2 - 2}{m_2} \quad (54)$$

ここで  $r_1, r_2$  をある値に指定したとすると

$$Y_3 = Y_2/r_1, \quad Y_1 = Y_2/r_2 \quad (55)$$

これを式 (42) に代入すれば

$$m_2(r_1 - r_2) = m_1 - m_3 \quad (56)$$

$m_1 - m_3$  は  $\pm 2$  と仮定しているから

$$m_2 = \pm \frac{2}{r_1 - r_2} \quad (57)$$

複号は  $m_1 - m_3 = \pm 2$  の複号と同順にとる。それゆえ  $r_1 - r_2$  も  $m_1 - m_3$  と同じ符号にとらねばならない。また  $r_1 - r_2$  をかかってな実数にえらぶことは許されず,  $\pm 2/(r_1 - r_2)$  が正の奇数となるようにえらばねばならない。換言すれば  $|r_1 - r_2|$  は半奇数の逆数でなければならない。

式 (51) または (54) が適用できるためには,  $m_2$  は 3 以上でなければならない。  $m_2 = 1$  なら式 (52), (53) が適用できるに過ぎない。  $m_1, m_2, m_3$  と回路パラメータとの関係を表-2 に示す。

表—2 3 辺平滑の場合の影像アドミタンス

Table 2 Image admittances of three sides smoothed Rat Race circuit.

No.	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$Y_1/Y_0$	$Y_2/Y_0$	$Y_3/Y_0$	$r_1$	$r_2$	$w$	$Y_{0a11}/Y_0$	$Y_{0a22}/Y_0$
1	3	1	1	1	1	1/3	3	1	1/3	2	2/3
2	1	3	3	3/5	1	1	1	5/3	3/5	$\sqrt{24/5}$	$\sqrt{8/3}$
3	1	3	3	1	1	3	1/3	1	3	$2/\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$
4	3	1	5	1/3	1	1	1	3	1/3	2/3	2
5	5	3	3	3	1	1	1	1/3	3	$2\sqrt{3}$	$2/\sqrt{3}$
6	5	3	3	1	1	3/5	5/3	1	3/5	$\sqrt{8/3}$	$\sqrt{24/5}$
7	3	5	1	5/3	1	1	1	3/5	5/3	$\sqrt{40/3}$	$\sqrt{8/5}$
8	3	5	1	1	1	5/7	7/5	1	5/7	$\sqrt{12/5}$	$\sqrt{60/7}$
9	7	1	5	1	1	1/3	3	1	1/3	2	2/3
10	3	5	5	5/7	1	1	1	7/5	5/7	$\sqrt{60/7}$	$\sqrt{12/5}$
11	3	5	5	1	1	5/3	3/5	1	5/3	$\sqrt{8/5}$	$\sqrt{40/3}$
12	5	3	7	3/5	1	1	1	5/3	3/5	$\sqrt{24/5}$	$\sqrt{8/3}$
13	5	3	7	1	1	3	1/3	1	3	$2\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$
14	1	7	3	7/9	1	1	1	9/7	7/9	$4\sqrt{7/9}$	$4/\sqrt{7}$
15	1	7	3	1	1	7/5	5/7	1	7/5	$\sqrt{12/7}$	$\sqrt{84/5}$
16	7	1	9	1/3	1	1	1	3	1/3	2/3	2
17	3	9	1	1	1	9/11	11/9	1	9/11	$\sqrt{20/3}$	$3\sqrt{20/11}$
18	3	9	1	9/7	1	1	1	7/9	9/7	12/7	4/3
19	5	7	3	1	1	7/9	9/7	1	7/9	$4\sqrt{7}$	$4\sqrt{7/9}$
20	5	7	3	7/5	1	1	1	5/7	7/5	$\sqrt{84/5}$	$\sqrt{12/7}$
21	7	5	5	1	1	5/7	7/5	1	5/7	$\sqrt{12/5}$	$\sqrt{60/7}$
22	7	5	5	5/3	1	1	1	3/5	5/3	$\sqrt{40/3}$	$\sqrt{8/5}$
23	9	3	7	1	1	3/5	5/3	1	3/5	$\sqrt{8/3}$	$\sqrt{24/5}$
24	9	3	7	3	1	1	1	1/3	3	$2\sqrt{3}$	$2/\sqrt{3}$
25	11	1	9	1	1	1/3	3	1	1/3	2	2/3

図-3はこれらを図示したものである。

ポート  $a1$  からの入力に対する  $b$  側の出力電力比は

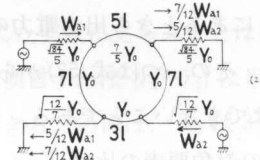
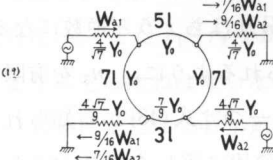
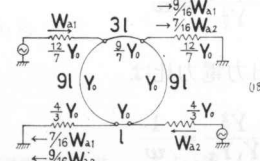
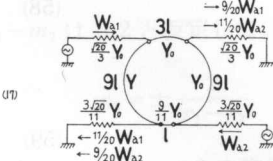
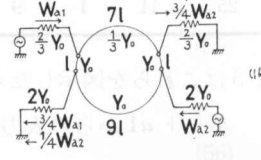
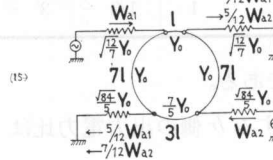
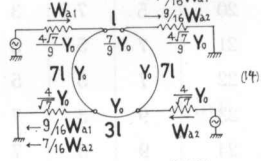
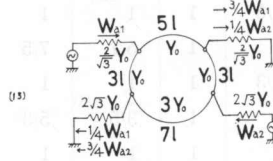
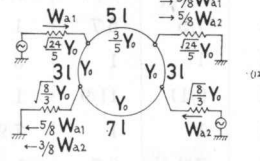
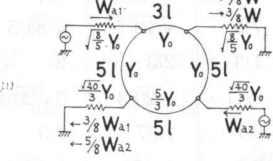
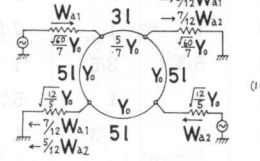
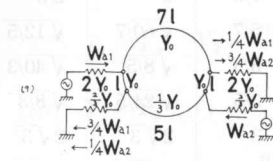
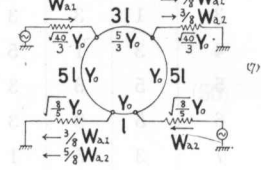
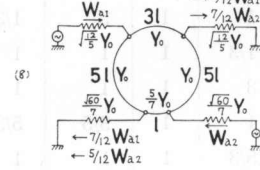
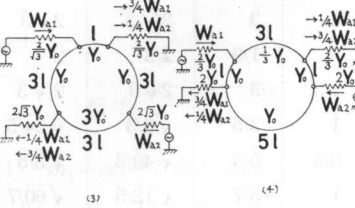
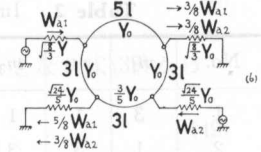
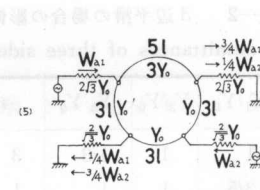
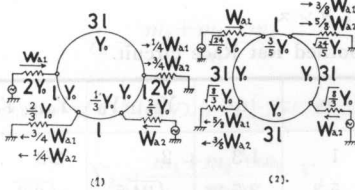
$$\left(\frac{W_{b1}}{W_{b2}}\right)_{a1} = \left|\frac{V_{b1}}{V_{b2}}\right|_{a1}^2 \frac{Y_{0b11}}{Y_{0b22}} = \frac{Y_1 Y_3}{Y_2^2} \equiv w \quad (58)$$

ポート  $a2$  からの入力に対する  $b$  側の出力電力比は

$$\left(\frac{W_{b1}}{W_{b2}}\right)_{a2} = \left|\frac{V_{b1}}{V_{b2}}\right|_{a2}^2 \frac{Y_{0b11}}{Y_{0b22}} = \frac{Y_2^2}{Y_1 Y_3} = \frac{1}{w} \quad (59)$$

このように入力が  $a1$  にあるときと、 $a2$  にあるときの出力電力の配分比はちょうど逆数になる。

この設計法に残る問題が二つある。その一つは式(57)から知られるように、 $m_2$  を有限にとる限り  $r_1$  と  $r_2$  とを等しくすることはできないことである。いま一つは式(43)から知られるように、影像アドミタンス行列の二つの対角要素の比は  $Y_1$  と  $Y_3$  の比に等しく、式(42)から



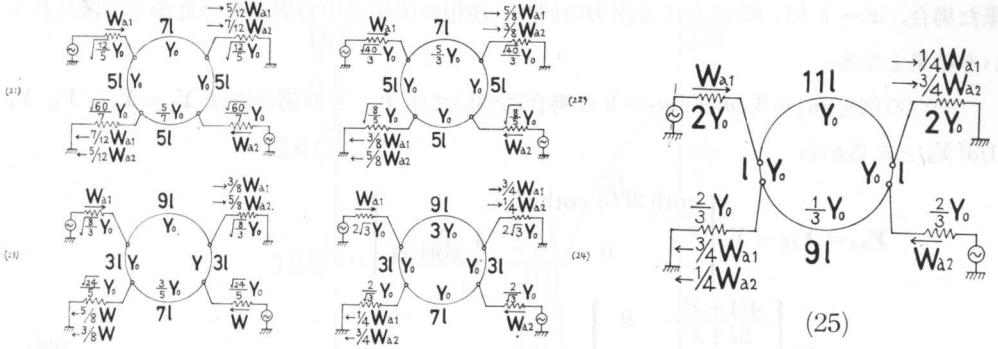


図-3 三辺平滑なループ・ハイブリッド回路図  
 Fig. 3 Three sides smoothed loop hybrid circuit.

$m_1 = m_3$  としない限り  $Y_1$  と  $Y_3$  とを等しくすることができないが、ハイブリッドの条件から  $m_1$  と  $m_3$  は等しくとることができず、したがって影像アドミタンス行列の二つの対角要素  $Y_{0a11}$  と  $Y_{0a22}$  とを等しくすることができないことである。 $m_2$  を十分大きくとればこの二つの問題を同時に解決できるが、実際は回路を構成する線路の消散損失などのため、回路をあまり大きくするとよい伝送が期待できない。

この設計による回路の一つの特徴は、その回路に伝送される二つのモードの位相量の関係にある。式(12)で与えられる行列  $A$  は、この場合に中心周波数の近傍で

$$A \cong \frac{-1}{\lambda} \begin{bmatrix} \pm jY_1 & \mp jY_2 \\ \mp jY_2 & \pm jY_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} m_1 Y_1 + m_2 Y_2 & 0 \\ 0 & m_2 Y_2 + m_3 Y_3 \end{bmatrix} \quad (60)$$

ゆえに  $A$  の (1, 1) 要素および (2, 2) 要素は

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &\cong \pm \frac{jY_3(m_1 Y_1 + m_2 Y_2)}{\lambda(Y_2^2 + Y_1 Y_3)} \\ A_{22} &\cong \mp \frac{jY_1(m_2 Y_2 + m_3 Y_3)}{\lambda(Y_2^2 + Y_1 Y_3)} \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

これに式(42)の対角化条件を代入すると

$$A_{11} \cong -A_{22} \quad (62)$$

であることが知られる。そのとき行列  $A$  の二つの固有値  $\tilde{A}_{11}$ ,  $\tilde{A}_{22}$  についても

$$\tilde{A}_{11} \cong -\tilde{A}_{22} \quad (63)$$

の関係がなければならない。 $\tilde{A}_{11}$ ,  $\tilde{A}_{22}$  は両モードの伝達定数(中心周波数の近傍ではともに虚数で  $\theta_1 = j\beta_1$ ,  $\theta_2 = j\beta_2$ )の双曲余弦であるから中心周波数の近傍では

$$\beta_1 \cong \beta_2 \pm \pi \quad (64)$$

つまり  $\beta_1$  と  $\beta_2$  の周波数特性は中心周波数の近傍では  $\pi$  だけ離れた平行な曲線になっているということである。このことは、二つのポート、例えば  $a1$ ,  $a2$  に同じ信号源からの入力が入って

来た場合、ポート  $b_1, b_2$  における出力の同相、逆相の関係が中心周波数の近傍では保たれるという結果となる。

一つの例を  $m_1 = 3, m_2 = m_3 = 1$  の場合について示す。この場合には  $Y_1 = Y_2 = Y_0, Y_3 = (1/3)Y_0$  となるから

$$\begin{aligned} Y_{aa} = Y_{bb} &= Y_0 \begin{bmatrix} \coth 3\gamma l + \coth \gamma l & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} \coth \gamma l \end{bmatrix} \\ &= Y_0 \begin{bmatrix} \frac{4(1+\lambda^2)}{3\lambda+\lambda^3} & 0 \\ 0 & \frac{4}{3\lambda} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (65)$$

$$\begin{aligned} Y_{ab} = Y_{ba} &= -Y_0 \begin{bmatrix} \operatorname{cosech} 3\gamma l & \operatorname{cosech} \gamma l \\ \operatorname{cosech} \gamma l & \frac{1}{3} \operatorname{cosech} \gamma l \end{bmatrix} \\ &= -Y_0 \begin{bmatrix} \frac{(1-\lambda^2)^{3/2}}{3\lambda+\lambda^3} & \frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda} \\ \frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda} & \frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{3\lambda} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (66)$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2+\lambda^2} \begin{bmatrix} -\frac{1+\lambda^2}{\sqrt{1-\lambda^2}} & \frac{3+\lambda^2}{\sqrt{1-\lambda^2}} \\ \frac{3(1+\lambda^2)}{\sqrt{1-\lambda^2}} & -\sqrt{1-\lambda^2} \end{bmatrix} \quad (67)$$

この式で  $\sqrt{1-\lambda^2}$  は  $\cos \beta l$  の逆数に等しく、 $\beta l$  の第一象限では正であるから、中心周波数の近傍では  $\sqrt{1-\lambda^2} \cong -j\lambda$  となる。それゆえ中心周波数の近傍では

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &\cong \frac{-j\lambda}{2+\lambda^2} \cong \frac{-j}{\lambda} = -\frac{1}{\Omega} \\ A_{22} &\cong \frac{j\lambda}{2+\lambda^2} \cong \frac{j}{\lambda} = \frac{1}{\Omega} \quad (\Omega \equiv \lambda/j) \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

となり  $A_{11}$  と  $A_{22}$  とは中心周波数の近傍で大きさ等しく符号だけが反対である。行列  $\mathbf{A}$  の二つの固有値を求めると

$$\left. \begin{aligned} \tilde{A}_{11} &= -\frac{2}{\sqrt{1-\lambda^2}} \cong -j\frac{2}{\Omega} \\ \tilde{A}_{22} &= \frac{2(1+\lambda^2)}{(2+\lambda^2)\sqrt{1-\lambda^2}} \cong j\frac{2}{\Omega} \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

図-4は両モードの減衰定数と位相定数の周波数特性を示す。第一モードは高域通過形、第二モードは帯域阻止形であり、第一モードのしゃ断電角は  $60^\circ$  に、第二モードのそれらは  $50.2^\circ$  と  $67.0^\circ$  にあり、第二モードの減衰極は  $54.8^\circ$  にある。図に示すように両モードの位相量  $\beta_1, \beta_2$  は  $\beta l = 90^\circ$  の近くでは  $180^\circ$  の差をもってほとんど平行である。

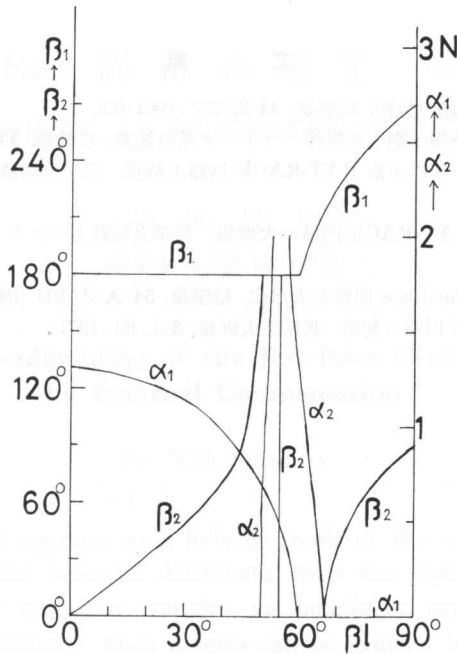


図-4 三辺平滑,  $m_1=3, m_2=m_3=1$  のループ・ハイブリッド回路の二つの伝送モードの伝搬定数の周波数 (電気角) 特性

Fig. 4 Frequency (electrical angle) characteristics of the propagation constant of two transmission modes of the three sides smoothed loop hybrid circuit.

### 7. 結 言

Rat Race 回路の基本形は簡単なものであるがそのハイブリッド回路としての条件を保ちつつ種々に変形することが可能である。本論文で提案している変形はそれによって中心周波数の近傍での動作特性を悪くするものでなく、回路の大形化が誘導される。回路を平滑に作るか、段付けするかによって電力配分比を  $1:1$  またはそれ以外の値にすることができる。

大形化によって動作特性が悪くならないのは影像イミタンスが終端イミタンスに近づくためと解釈できる。

変形された Rat Race 回路の影像イミタンスの中心周波数における値を対角行列にする設計方法も導かれ、ループの各辺の長さの関係と終端イミタンスと電力配分比の関係を図に示した。これらの回路では中心周波数の近傍で出力電圧の位相の関係が中心周波数における関係に保持されるという特長があるが、終端イミタンスを等しくすることができないとか、二つの電力配分比を両方とも  $1:1$  にすることができないなどの問題が残された。

最後に平素から絶えず御指導を賜わっている本学学長松本秋男先生に厚く感謝の意を表します。

## 文 献

- 1) 伊藤健一： Rat Race 回路の特性，信学誌，**44-2**，237 (1961-02).
- 2) 西出 雅・松本秋男： 多端子網への映像パラメータ系の拡張，信学論，**53-A-6**，92 (1970-06).
- 3) 松本秋男： 映像パラメータによる RAT-RACE 回路の解析，信学会回路とシステム理論研究会資料，**CT 70-14** (1970-05).
- 4) 品田雄治・松本秋男： RAT-RACE 回路の大形化，信学会回路とシステム理論研究会資料，**CT 70-21** (1970-07).
- 5) 品田雄治・松本秋男： Rat-Race 回路の大形化，信学論，**54-A-2**，103 (1971-02).
- 6) 品田雄治： RAT RACE 回路の解析，北見工大研報，**3-1**，63 (1971).

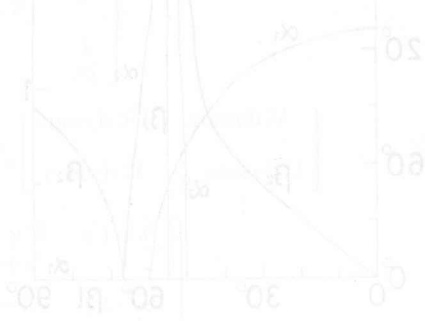


図4 三状態等価ループの背後に於ける伝送線の伝播定数の関係  
Fig. 4 Propagation constant and phase constant of the transmission line of the three state equivalent loop behind stage