

# Rat Race 回路の研究 (その1)

— Rat Race 回路の解析 —

品田 雄治\*

(昭和46年3月12日受理)

## An Analysis of the Rat Race Circuit

by Yūji SHINADA

The Rat Race circuit is a kind of hybrid circuit with four ports on a loop of transmission lines. Its characteristic qualities were investigated by Mr. Ito.

In this paper a description is given of the operation of the Rat Race circuit in terms of its cascade matrix, admittance matrix, (2,2)-port image parameters and mode separation.

Although the usual way of termination of the Rat Race circuit is not based upon its image parameters, it is shown that a perfect impedance matching and a perfect isolation are simultaneously attainable at the center frequency.

The treatment suggests that certain improvements, e.g. broadbanding of the Rat Race circuit, can be introduced through the adoption of external immittance compensation.

### 1. 緒言

二つの信号源からの電力を相互に干渉なく組み合わせるため、ハイブリッド回路が用いられる。Rat Race 回路はそのような用途に用いられるものの一種である。その動作については十年ほど前に伊藤<sup>1)</sup>によって研究された。

本論文は Rat Race 回路の動作を縦続行列, アドミタンス行列, (2-2) ポート映像パラメータ, モード分解などの手段によって解析しようとするものである。

### 2. ハイブリッド回路の条件

Rat Race 回路は普通 図-1 のように設計される。すなわち特性アドミタンス  $Y_0$  の伝送線路で全長  $6l$  ( $l$  は伝送の中心周波数で  $1/4$  波長に等しくとる) のループを作り, これに四つのポート  $a1, a2, b1, b2$  を設け, 各ポートの終端アドミタンスを  $\sqrt{2} Y_0$  とする。この回路はつぎのように働くことを

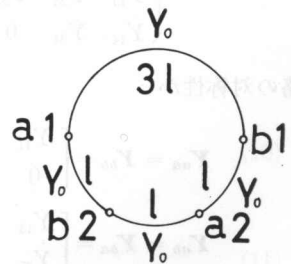


図-1 普通の設計の Rat Race 回路  
Fig. 1. Ordinary design of the Rat Race circuit.

\* 北見工業大学電気工学科

目的とする。

(1) ポート  $a_1$  ( $a_2$ ) からの入力はポート  $a_2$  ( $a_1$ ) へ行かず、ポート  $b_1$  とポート  $b_2$  とに半分ずつ逆相 (同相) に配分される。

(2) ポート  $b_1$  ( $b_2$ ) からの入力はポート  $b_2$  ( $b_1$ ) へ行かず、ポート  $a_1$  とポート  $a_2$  とに半分ずつ逆相 (同相) に配分される。

このハイブリッド条件が中心周波数で成立することを後に証明するが、つぎのように解釈することができる。

$a_1$  から  $a_2$  までの線路は、 $b_1$  を通る方は  $4l$ 、 $b_2$  を通る方は  $2l$  であり、両経路を通して  $a_2$  に伝送される両成分の位相差が二直角のためたがい打ち消し、 $a_1$  からの入力は  $a_2$  へ伝送されず完全な分離が達成される。また  $a_1$  から  $b_1$  への経路はいずれも  $3l$  であり、 $a_1$  から  $b_2$  への経路は  $l$  と  $5l$  であるから、 $a_1$  から  $b_1$ 、 $b_2$  へは伝送され、しかも  $b_1$  と  $b_2$  の出力電圧の位相差は二直角、すなわち逆相となる。

同様な考察によりポート  $a_2$  からの入力はポート  $a_1$  へ完全分離され、 $b_1$ 、 $b_2$  へは伝送されるが、それらの出力電圧の位相差は  $0$ 、すなわち同相となる。

なお考えている回路は、図-1 に示すように ( $a_1$ ,  $a_2$ ) 端と ( $b_1$ ,  $b_2$ ) 端とについて対称であるから、ハイブリッド条件 (1) と (2) は同じことを意味する。

これらの条件は中心周波数およびその奇数倍の周波数で成り立ち、そのほかの周波数では成り立たない。

### 3. 縦 続 行 列

図-1 の回路は  $a$  端に二つのポート  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b$  端に二つのポート  $b_1$ ,  $b_2$  を有する一つの (2, 2) ポートとみなすことができる。そのアドミタンス行列  $\mathbf{Y}$  はつぎの形を有する。

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_{11} & 0 & Y_{13} & Y_{14} \\ 0 & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} \\ Y_{13} & Y_{23} & Y_{33} & 0 \\ Y_{14} & Y_{24} & 0 & Y_{44} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{aa} & \mathbf{Y}_{ab} \\ \mathbf{Y}_{ba} & \mathbf{Y}_{bb} \end{bmatrix} \quad (1)$$

回路の対称性から

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Y}_{aa} = \mathbf{Y}_{bb} &= \begin{bmatrix} Y_{11} & 0 \\ 0 & Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{33} & 0 \\ 0 & Y_{44} \end{bmatrix} \\ \mathbf{Y}_{ab} = \mathbf{Y}_{ba} &= \begin{bmatrix} Y_{13} & Y_{14} \\ Y_{23} & Y_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{13} & Y_{23} \\ Y_{14} & Y_{24} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$\mathbf{Y}$  の各要素を、回路を構成する線路の特性アドミタンス  $Y_0$  と伝搬定数  $\gamma$  (線路を無損失と仮定し  $\gamma = j\beta$  とする) とをもって表わすと

$$\left. \begin{aligned} Y_{11} &= Y_0(\coth 3\tilde{\gamma}l + \coth \tilde{\gamma}l) \\ Y_{22} &= 2Y_0 \coth \tilde{\gamma}l \\ Y_{13} &= -Y_0 \operatorname{cosech} 3\tilde{\gamma}l \\ Y_{23} = Y_{14} = Y_{24} &= -Y_0 \operatorname{cosech} \tilde{\gamma}l \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

各ポートの電圧を

$$\left[ \begin{array}{c} V_{a1} \\ V_{a2} \end{array} \right] = \mathbf{V}_a, \quad \left[ \begin{array}{c} V_{b1} \\ V_{b2} \end{array} \right] = \mathbf{V}_b \quad (4)$$

とし、各ポートに外から流れ込む電流を

$$\left[ \begin{array}{c} I_{a1} \\ I_{a2} \end{array} \right] = \mathbf{I}_a, \quad \left[ \begin{array}{c} I_{b1} \\ I_{b2} \end{array} \right] = \mathbf{I}_b \quad (5)$$

とおくと、 $\mathbf{V}_a, \mathbf{I}_a$  と、 $\mathbf{V}_b, \mathbf{I}_b$  との間を縦続行列  $\mathbf{F}$  によって関係づけることができ

$$\left[ \begin{array}{c} \mathbf{V}_a \\ \mathbf{I}_a \end{array} \right] = \mathbf{F} \left[ \begin{array}{c} \mathbf{V}_b \\ -\mathbf{I}_b \end{array} \right] \quad (6)$$

ここに  $\mathbf{F}$  は 4 行 4 列の行列で

$$\mathbf{F} = \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \right] \quad (7)$$

と表わすことができ、 $\mathbf{Y}$  との間に

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A} &= -\mathbf{Y}_{ba}^{-1} \mathbf{Y}_{bb}, & \mathbf{B} &= -\mathbf{Y}_{ba}^{-1}, \\ \mathbf{C} &= -\mathbf{Y}_{aa} \mathbf{Y}_{ba}^{-1} \mathbf{Y}_{bb} + \mathbf{Y}_{ab}, & \mathbf{D} &= -\mathbf{Y}_{aa} \mathbf{Y}_{ba}^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

の関係がある。 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$  はいずれも 2 行 2 列の行列である。式(6)はまたつぎのように表わすこともできる。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{V}_a &= \mathbf{A} \mathbf{V}_b - \mathbf{B} \mathbf{I}_b \\ \mathbf{I}_a &= \mathbf{C} \mathbf{V}_b - \mathbf{D} \mathbf{I}_b \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

#### 4. 中心周波数における動作

中心周波数では

$$\tilde{\gamma}l = j\pi/2 \quad (10)$$

であるから

$$Y_{11} = 0, \quad Y_{22} = 0 \quad (11)$$

$$Y_{13} = -jY_0 \quad (12)$$

$$Y_{23} = Y_{14} = Y_{24} = jY_0 \quad (13)$$

それ故  $\mathbf{Y}_{aa}, \mathbf{Y}_{bb}$  は零行列であり、したがって  $\mathbf{A}$  も  $\mathbf{D}$  も零行列であるから、式(9)はつぎのよ

らに書き換えられる。

$$\mathbf{V}_a = -\mathbf{B}\mathbf{I}_b, \quad \mathbf{I}_a = \mathbf{C}\mathbf{V}_b \quad (14)$$

いま  $b$  端の終端アドミタンスを  $\mathbf{Y}_{bl}$  とすると

$$\mathbf{I}_b = -\mathbf{Y}_{bl}\mathbf{V}_b \quad (15)$$

これを式(14)に代入すると

$$\mathbf{V}_a = \mathbf{B}\mathbf{Y}_{bl}\mathbf{V}_b = \mathbf{B}\mathbf{Y}_{bl}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{I}_a \quad (16)$$

したがって入力インピーダンス  $\mathbf{Z}_{ai}$  は

$$\mathbf{Z}_{ai} = \mathbf{B}\mathbf{Y}_{bl}\mathbf{C}^{-1} \quad (17)$$

この式は入力インピーダンス  $\mathbf{Z}_{ai}$  が終端アドミタンス  $\mathbf{Y}_{bl}$  に比例することを意味する。この式に

$$\mathbf{C} = \mathbf{Y}_{ab}, \quad \mathbf{B} = -\mathbf{Y}_{ba}^{-1} = -\mathbf{Y}_{ab}^{-1} \quad (18)$$

を代入すると

$$\mathbf{Z}_{ai} = -\mathbf{Y}_{ab}^{-1}\mathbf{Y}_{bl}\mathbf{Y}_{ab}^{-1} \quad (19)$$

いま  $\mathbf{Y}_{bl}$  が単位行列に相似で

$$\mathbf{Y}_{bl} = \mathbf{Y}_b \cdot \mathbf{I}_2 \quad (20)$$

であったと仮定する。ここに  $\mathbf{Y}_b$  はスカラーとする。他方、式(12), (13)から  $\mathbf{Y}_{ab}$  は

$$\mathbf{Y}_{ab} = j\mathbf{Y}_0 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

ゆえに

$$\mathbf{Y}_{ab}^{-1} = j\frac{Z_0}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad Z_0 = \frac{1}{\mathbf{Y}_0} \quad (22)$$

$$\mathbf{Y}_{ab}^{-2} = -\frac{Z_0^2}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\mathbf{Z}_{ai} = \frac{\mathbf{Y}_b}{2} Z_0^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{Z}_a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

ここに

$$\mathbf{Z}_a = \frac{1}{2} \mathbf{Y}_b Z_0^2 \quad (25)$$

このように  $\mathbf{Y}_{bl}$  が単位行列に相似のとき  $\mathbf{Z}_{ai}$  も単位行列に相似となる。いま

$$\mathbf{Z}_a = \mathbf{Y}_b^{-1} \quad (26)$$

となるようにするためには、式(25)から

$$\mathbf{Y}_b = \sqrt{2} \mathbf{Y}_0 \quad (27)$$

とすればよく,  $1/Z_a$  を  $Y_a$  とすると

$$Y_a = Y_b = \sqrt{2} Y_0 \quad (28)$$

となる。すなわちポート  $b1, b2$  を, 分離したアドミタンス  $\sqrt{2} Y_0$  で終端すると, ポート  $a1, a2$  の入力アドミタンスも分離した  $\sqrt{2} Y_0$  となる。これは Rat Race 回路の動作状態において分離の条件が満たされることを意味する。

なお電圧伝送係数  $N$  を求めると, 式(9)と式(15)とから,  $N$  は一般に

$$N = A + BY_{bl} \quad (29)$$

で与えられるが, 中心周波数で  $A$  は零行列であるから

$$N = BY_{bl} \quad (30)$$

となる。そうすると  $Y_{bl} = \sqrt{2} Y_0 I_2$  に対し

$$N = - \begin{bmatrix} Y_{13} & Y_{14} \\ Y_{23} & Y_{24} \end{bmatrix}^{-1} \sqrt{2} Y_0 I_2 = \frac{j}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

入力電圧  $V_a$  に対する出力電圧  $V_b$  は

$$V_b = N^{-1} V_a = \frac{j}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} V_a \quad (32)$$

すなわち

$$V_{b1} = \frac{j}{\sqrt{2}} (V_{a1} - V_{a2}), \quad V_{b2} = \frac{-j}{\sqrt{2}} (V_{a1} + V_{a2}) \quad (33)$$

入力電圧が  $V_{a1}$  のみのとき, 出力電圧  $V_{b1}, V_{b2}$  は式(33)から見て等値異符号であり, 入力電圧が  $V_{a2}$  のみのときは出力電圧  $V_{b1}, V_{b2}$  は等値同符号である。

このようにして中心周波数においては, ポート間の分離の条件, 整合の条件および電力の等比配分の三条件が同時に達成されることが証明された。

### 5. 中心周波数の近傍での動作

中心周波数から少しでも離れると, 式(11)はもはや成り立たない。しかし中心周波数から離れる程度が小さいなら, 式(11)の等号からのずれも小さいであろう。

この問題を取り扱うために周波数そのものの代わりに

$$\lambda \equiv \tanh \gamma l \quad (34)$$

なるパラメータを用いる。 $\gamma$  は実周波数で虚数であるから,  $\lambda$  も実周波数で虚数であり

$$\lambda = j\Omega, \quad \Omega = \tan \beta l \quad (35)$$

この  $\lambda$  は分布定数回路を取り扱うときにしばしば用いられる変形複素周波数パラメータである。これを用いて  $\gamma l$  の双曲線関数を表わすと

$$\left. \begin{aligned}
 \sinh \gamma l &= \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}, & \cosh \gamma l &= \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}, \\
 \tanh \gamma l &= \lambda, & \coth \gamma l &= \frac{1}{\lambda} \\
 \sinh 2\gamma l &= \frac{2\lambda}{1-\lambda^2}, & \cosh 2\gamma l &= \frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2} \\
 \tanh 2\gamma l &= \frac{2\lambda}{1+\lambda^2}, & \cosh 2\gamma l &= \frac{1+\lambda^2}{2\lambda} \\
 \sinh 3\gamma l &= \frac{3\lambda+\lambda^3}{(1-\lambda^2)^{3/2}}, & \cosh 3\gamma l &= \frac{1+3\lambda^2}{(1-\lambda^2)^{3/2}} \\
 \tanh 3\gamma l &= \frac{3\lambda+\lambda^3}{1+3\lambda^2}, & \coth \gamma l &= \frac{1+3\lambda^2}{3\lambda+\lambda^3}
 \end{aligned} \right\} (36)$$

中心周波数では  $\lambda$  は無限大であるが、中心周波数から離れるにしたがって  $\lambda$  の絶対値は減ってくる。 $\lambda^{-1}$  を考えると中心周波数では零であるが、中心周波数の近傍ではほぼ直線的に変化する。そこで式(3)で与えられている  $Y_{ij}$  を  $\lambda$  の負べき級数で表わそう。

$$\left. \begin{aligned}
 Y_{11} &= \left\{ \frac{4}{\lambda} - \frac{8}{\lambda^3} + \frac{24}{\lambda^5} \dots \right\} Y_0 \cong \frac{4}{\lambda} Y_0 \\
 Y_{22} &= \frac{2}{\lambda} Y_0 \\
 Y_{13} &= -jY_0 \left\{ 1 - \frac{9}{2\lambda^2} + \frac{111}{8\lambda^4} \dots \right\} \cong -jY_0 \\
 Y_{23} &= Y_{14} = Y_{24} = jY_0 \left\{ 1 - \frac{1}{2\lambda^2} - \frac{1}{8\lambda^4} \dots \right\} \cong jY_0
 \end{aligned} \right\} (37)$$

ここで記号  $\cong$  は  $\lambda$  の負べき級数の初項のみを採ったことを意味し、中心周波数では正確に等号が成り立ち、その近傍では近似的に等号が成り立つ。

式(37)の  $Y_{13}$ ,  $Y_{23}$  の符号は中心周波数の5倍, 9倍, ... の周波数でもそのまま適用し, 3倍, 7倍, ... の周波数では反対の符号を採るべきである。

中心周波数から離れると  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{D}$  は零行列でなくなるので、入力イミタンスは前章で求めたような取扱い方はもはや適用できない。各ポートの電圧電流の関係は式(1)から

$$\left. \begin{aligned}
 I_{a1} &= Y_{11}V_{a1} + Y_{13}V_{b1} + Y_{14}V_{b2} \\
 I_{a2} &= Y_{22}V_{a2} + Y_{23}V_{b1} + Y_{24}V_{b2} \\
 I_{b1} &= Y_{13}V_{a1} + Y_{23}V_{a2} + Y_{33}V_{b1} \\
 I_{b2} &= Y_{14}V_{a1} + Y_{24}V_{a2} + Y_{44}V_{b2}
 \end{aligned} \right\} (38)$$

ここでポート  $b1$ ,  $b2$  の終端アドミタンスを  $Y_{3t}$ ,  $Y_{4t}$  とすると

$$I_{b1} = -Y_{3t}V_{b1}, \quad I_{b2} = -Y_{4t}V_{b2} \quad (39)$$

となるから、式(38)の第3, 第4式はつぎのように書き換えられる。

$$\left. \begin{aligned} Y_{13}V_{a1} + Y_{23}V_{a2} + (Y_{33} + Y_{3l})V_{b1} &= 0 \\ Y_{14}V_{a1} + Y_{24}V_{a2} + (Y_{44} + Y_{4l})V_{b2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

これらの式を用いて  $V_{b1}$ ,  $V_{b2}$  を  $V_{a1}$ ,  $V_{a2}$  で表わし、それらを式(38)の第1, 第2式に代入するとつぎの関係を得る。

$$\left. \begin{aligned} I_{a1} &= \left( Y_{11} - \frac{Y_{13}^2}{Y_{33} + Y_{3l}} - \frac{Y_{14}^2}{Y_{44} + Y_{4l}} \right) V_{a1} - \left( \frac{Y_{13}Y_{23}}{Y_{33} + Y_{3l}} + \frac{Y_{14}Y_{24}}{Y_{44} + Y_{4l}} \right) V_{a2} \\ I_{a2} &= \left( Y_{22} - \frac{Y_{23}^2}{Y_{33} + Y_{3l}} - \frac{Y_{24}^2}{Y_{44} + Y_{4l}} \right) V_{a2} - \left( \frac{Y_{13}Y_{23}}{Y_{33} + Y_{3l}} + \frac{Y_{14}Y_{24}}{Y_{44} + Y_{4l}} \right) V_{a1} \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

$I_{a1}$ ,  $I_{a2}$ ,  $V_{a1}$ ,  $V_{a2}$  の間の関係をアドミタンス行列

$$Y_{ai} = \begin{bmatrix} Y_{ai11} & Y_{ai12} \\ Y_{ai21} & Y_{ai22} \end{bmatrix} \quad (42)$$

で表わすと式(41)から

$$\left. \begin{aligned} Y_{ai11} &= Y_{11} - \frac{Y_{13}^2}{Y_{33} + Y_{3l}} - \frac{Y_{14}^2}{Y_{44} + Y_{4l}} \\ Y_{ai12} &= -\frac{Y_{13}Y_{23}}{Y_{33} + Y_{3l}} - \frac{Y_{14}Y_{24}}{Y_{44} + Y_{4l}} = Y_{ai21} \\ Y_{ai22} &= Y_{22} - \frac{Y_{23}^2}{Y_{33} + Y_{3l}} - \frac{Y_{24}^2}{Y_{44} + Y_{4l}} \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

これらの式の中の  $Y_{ij}$  に式(37)で与えられる値を,  $Y_{3l}$ ,  $Y_{4l}$  には  $\sqrt{2}Y_0$  を代入すると

$$\left. \begin{aligned} Y_{ai11} &\cong \sqrt{2}Y_0 + \frac{1}{\lambda}Y_0 \\ Y_{ai12} &\cong \frac{1}{\lambda}Y_0 \\ Y_{ai22} &\cong \sqrt{2}Y_0 - \frac{1}{\lambda}Y_0 \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

中心周波数では  $\lambda = \infty$ ,  $\lambda^{-1} = 0$  であるから

$$Y_{ai11} = Y_{ai22} = \sqrt{2}Y_0, \quad Y_{ai12} = 0 \quad (45)$$

となって完全整合と完全分離が同時に達成されるが, 中心周波数からはずれると式(44)の各式の  $\lambda^{-1}$  の項を無視することができず, 整合も分離も不完全になる。

ポート  $b1$ ,  $b2$  を  $\sqrt{2}Y_0$  で終端した状態で, ポート  $a2$  も  $\sqrt{2}Y_0$  で終端されていると仮定するとポート  $a1$  から回路を見た入力アドミタンスは

$$Y_{ai11} = Y_{ai11} - \frac{Y_{ai12}^2}{Y_{ai22} + \sqrt{2}Y_0} \quad (46)$$

さて  $Y_{ai12}$  は式(44)に示すように,  $\lambda^{-1}Y_0$  の程度であり,  $Y_{ai22} + \sqrt{2}Y_0$  は  $2\sqrt{2}Y_0$  の程度であるから式(46)の右辺の第2項は  $\lambda^{-2}Y_0/2\sqrt{2}$  の程度である。これを  $Y_{ai11}$  中の  $\lambda^{-1}Y_0$  の項にくらべて無視してよいとするならば

$$Y_{ain11} \cong Y_{at11} \quad (47)$$

同様にポート  $a2$  についても

$$Y_{ain22} \cong Y_{at22} \quad (48)$$

これらのポートにおける反射係数は

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 &= \left| \frac{\sqrt{2}Y_0 - Y_{ain11}}{\sqrt{2}Y_0 + Y_{ain11}} \right| \\ \rho_2 &= \left| \frac{\sqrt{2}Y_0 - Y_{ain22}}{\sqrt{2}Y_0 + Y_{ain22}} \right| \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

与えられるが、 $Y_{ain11}$ ,  $Y_{ain22}$  のかわりに  $Y_{at11}$ ,  $Y_{at22}$  を用いることができる。

つぎにポート  $a1$  と  $a2$  との間の分離度について考えよう。これはポート  $a1$  からの入力とそれによるポート  $a2$  から終端イミタンスへの出力との比にもとづいて定義することができよう。ポート  $a1$  での反射が大きくないとするとその入力電圧は

$$W_{a1} = \sqrt{2}Y_0 |V_{a1}|^2 \quad (50)$$

これに対してポート  $a2$  からの皮相出力はその電圧  $V_{a2}$  と電流  $I_{a2}$  の積の絶対値で与えられるが

$$\left. \begin{aligned} I_{a1} &= Y_{at11}V_{a1} + Y_{at12}V_{a2} \\ I_{a2} &= Y_{at12}V_{a1} + Y_{at22}V_{a2} \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

において

$$I_{a2} = -Y_{2l}V_{a2} \quad (52)$$

とおくと

$$V_{a2} = -\frac{Y_{at12}}{Y_{at22} + Y_{2l}} V_{a1} \quad (53)$$

$Y_{at22} \cong \sqrt{2}Y_0$ ,  $Y_{2l} = \sqrt{2}Y_0$  とおくと

$$\begin{aligned} V_{a2} &\cong -\frac{Y_{at12}}{2\sqrt{2}Y_0} V_{a1}, & I_{a2} &= -\sqrt{2}Y_0 V_{a2}, & V_{a2}I_{a2} &\cong \frac{\sqrt{2}Y_0 Y_{at12}^2}{8Y_0^2} V_{a1}^2 \\ \therefore \frac{W_1}{|V_{a2} \cdot I_{a2}|} &\cong \frac{8Y_0^2}{|Y_{at12}^2|} \end{aligned} \quad (54)$$

この電力比にもとづいて分離度  $S_{12}$  を定義する。

$$\begin{aligned} S_{12} &= 10 \log_{10} \frac{W_1}{|V_{a2} I_{a2}|} \cong 20 \log_{10} \frac{2\sqrt{2}Y_0}{|Y_{ain12}|} \quad (\text{dB}) \\ &= \log_e \frac{2\sqrt{2}Y_0}{|Y_{ain12}|} \quad (\text{N}) \end{aligned} \quad (55)$$

これに式(44)の第2式を代入すると

$$S_{12} \cong 20 \log_{10}(2\sqrt{2}\Omega) \quad (\text{dB}) \quad (56)$$

図-2, 3は正確な式によって求めた反射係数と分離度の周波数特性を示す。



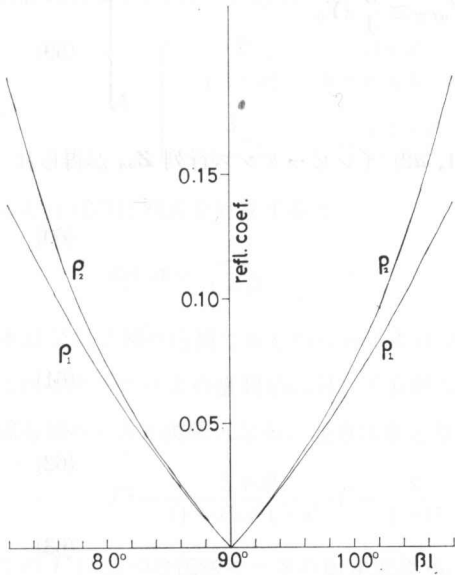


図-2 Rat Race 回路の反射係数の周波数 (電気角) 特性

Fig. 2. Frequency (electrical angle) characteristics of reflection coefficients of the Rat Race circuit.

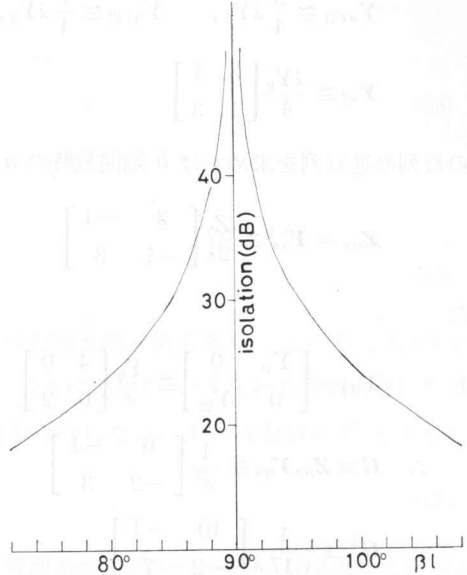


図-3 Rat Race 回路の分離度の周波数 (電気角) 特性

Fig. 3. Frequency (electrical angle) characteristics of the isolation of the Rat Race circuit.

### 6. 映像イミタンスの公称値

式(44)で与えられる入力アドミタンスに  $\lambda^{-1}$  の項が存在することは、終端アドミタンスが中心周波数において映像アドミタンスと異なっていることによると推定される。そこで中心周波数における映像アドミタンス行列 (2行2列の行列) を求め、それを終端アドミタンス行列 (2行2列の対角行列で、対角要素の値は  $\sqrt{2} Y_0$ ) とくらべて見よう。

式(43)の  $Y_{3i}, Y_{4i}$  を零とおけば、 $b$  端 ( $b_1, b_2$ ) を開放したときのアドミタンスが得られ

$$Y_{af} = \begin{bmatrix} Y_{af11} & Y_{af12} \\ Y_{af21} & Y_{af22} \end{bmatrix} \quad (57)$$

$$\left. \begin{aligned} Y_{af11} &= Y_{11} - \frac{Y_{13}^2}{Y_{33}} - \frac{Y_{14}^2}{Y_{44}} \\ Y_{af12} &= -\frac{Y_{13}Y_{23}}{Y_{33}} - \frac{Y_{14}Y_{24}}{Y_{44}} = Y_{af21} \\ Y_{af22} &= Y_{22} - \frac{Y_{23}^2}{Y_{33}} - \frac{Y_{24}^2}{Y_{44}} \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

これらの式の中の  $Y_{ij}$  に式(37)で与えられる値を代入すると

$$\left. \begin{aligned} Y_{af11} &\cong \frac{3}{4} \lambda Y_0, & Y_{af12} &\cong \frac{1}{4} \lambda Y_0, & Y_{af22} &\cong \frac{3}{4} \lambda Y_0 \\ Y_{af} &\cong \frac{\lambda Y_0}{4} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

この行列の逆行列を求めれば  $b$  端開放時の  $a$  端 ( $a1, a2$ ) インピーダンス行列  $Z_{aa}$  が得られ

$$Z_{aa} = Y_{af}^{-1} \cong \frac{Z_0}{2\lambda} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad (60)$$

また

$$Y_{aa} = \begin{bmatrix} Y_{11} & 0 \\ 0 & Y_{22} \end{bmatrix} \cong \frac{Y_0}{\lambda} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (61)$$

$$\therefore G \equiv Z_{aa} Y_{aa} \cong \frac{1}{\lambda^2} \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad (62)$$

$$G^{\frac{1}{2}} \cong \frac{1}{\sqrt{17}\lambda} \begin{bmatrix} 10 & -1 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \quad (63)$$

影像インピーダンス行列  $Z_{0a}$  は

$$Z_{0a} = G^{\frac{1}{2}} Y_{aa}^{-1} \quad (64)$$

で与えられ

$$Z_{0a} \cong \frac{Z_0}{2\sqrt{17}} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \quad (65)$$

その逆行列、すなわち影像アドミタンス行列は

$$Y_{0a} \cong \frac{Y_0}{\sqrt{17}} \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = Y_0 \begin{bmatrix} 1.698 & 0.243 \\ 0.243 & 1.213 \end{bmatrix} \quad (66)$$

このように中心周波数での影像アドミタンス行列の要素は終端アドミタンス  $\sqrt{2}Y_0$  と比較してその 20% 程度の差がある。このことが、この回路が広帯域動作に適しないことの原因となっていると考えられる。

## 7. モード分解

Rat Race 回路は (2, 2) ポート的一种であるから、 $A$  行列の二つの固有値が重複したり複素共役になったりしない限り二つの伝送モードが重畳して伝送されると考えることができる。 $A$  と  $Y$  行列との関係は

$$\begin{aligned} A &= -Y_{ba}^{-1} Y_{bb} \\ &= - \begin{bmatrix} Y_{13} & Y_{23} \\ Y_{14} & Y_{24} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Y_{33} & 0 \\ 0 & Y_{44} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (67)$$

これに式 (2), (3), (36) を適用すると

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{1-\lambda^2}} & \frac{3+\lambda^2}{(1+\lambda^2)\sqrt{1-\lambda^2}} \\ \frac{2}{\sqrt{1-\lambda^2}} & -\frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{1+\lambda^2} \end{pmatrix} \quad (68)$$

この行列の行列式を計算すると

$$\det \mathbf{A} = \frac{-4}{1-\lambda^2} \quad (69)$$

$\mathbf{A}$  は 2 行 2 列の行列であるから  $\det \mathbf{A}$  は  $\mathbf{A}$  の二つの固有値の積である。ところで式 (69) からこれはすべての  $\lambda$  の虚数値に対して有限である。ゆえに虚数の  $\lambda$  (すなわち実周波数) で  $\mathbf{A}$  の固有値の一方が無限大なら、他方は零とならなければならない。 $\mathbf{A}$  の固有値を  $\Gamma$  とすると

$$\Gamma^2 - \frac{3+\lambda^2}{(1+\lambda^2)\sqrt{1-\lambda^2}} \Gamma - \frac{4}{1-\lambda^2} = 0 \quad (70)$$

この  $\Gamma$  は二つの伝送モードの伝達定数  $\theta_1, \theta_2$  の双曲余弦であつて、しゃ断周波数では  $+1$  または  $-1$  となる。 $\Gamma = \pm 1$  に対する  $\lambda$  の値は次式を満足する。

$$\frac{3+\lambda^2}{1-\lambda^2} \left\{ 1 \pm \frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{1+\lambda^2} \right\} = 0 \quad (71)$$

これを満足する  $\lambda$  の値は  $\pm j\sqrt{3}$  以外にはない。ゆえに  $\beta l$  の第一象限内では、どちらか (または両方) のモードのしゃ断周波数は  $\beta l = 60^\circ = \pi/3$  のところ以外にはない。

$\Gamma$  の二つの値を  $\tilde{A}_{11}, \tilde{A}_{22}$  とすると

$$\tilde{A}_{11} = \cosh \theta_1, \quad \theta_1 = \alpha_1 + j\beta_1$$

$$\tilde{A}_{22} = \cosh \theta_2, \quad \theta_2 = \alpha_2 + j\beta_2$$

$\lambda=0$  では

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_{11} = -4, \quad \tilde{A}_{22} = 1, \\ \cosh \alpha_1 = 4, \quad \beta_1 = \pi, \quad \alpha_2 = 0, \quad \beta_2 = 0$$

$\lambda=j$  では

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & \infty \\ \sqrt{2} & \infty \end{bmatrix}$$

ここでは  $\mathbf{A}$  の固有値のうち一方が  $\infty$  であり、すでに述べた理由によって他方は零である。

$\lambda=j\sqrt{3}$  では

$$\mathbf{A} = \pm \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \beta_1 \text{ または } \beta_2 = 0 \text{ または } \pi, \\ \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

これを要するに  $\beta l = 0 \sim 60^\circ$  の間では一方のモードが通過域に、他方のモードが減衰域 ( $\beta l = 45^\circ$  に減衰極がある) にあり、 $\beta l = 60^\circ \sim 90^\circ$  では両モードとも通過域である。 $\beta_2$  として  $\beta l = 60^\circ$  の

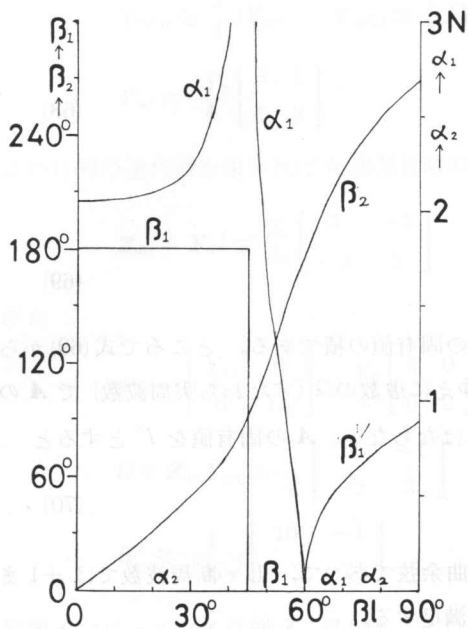


図-4 Rat Race 回路の二つの伝送モードの伝搬定数の周波数 (電気角) 特性

Fig. 4. Frequency (electrical angle) characteristics of the propagation constant of two transmission modes of the Rat Race circuit.

前後で連続になる方を採用すると、第一モードは減衰極を有する高域通過形、第二モードは全周波通過形となる。

図-4 は両伝送モードの減衰定数および位相定数の周波数特性を示す。

この考察から  $0 < \beta l < 60^\circ$  の範囲で一方のモードが減衰域にあるので、実数のイミタンス終端に対して完全整合をとることは実際的に不可能であることが知られる。

### 8. 影像イミタンス行列の対角化

図-1 に示す Rat Race 回路の基本形では式 (65), (66) に示したように影像イミタンスが対角行列になっていない。もし何らかの方法でこれを対角行列にすることができれば、分離した終端イミタンスを影像イミタンスに一致させることができよう。

回路の対称性を保ちながらこのことを実現する一つの方法は、ポート  $a_2, b_2$  間の線路の

特性アドミタンスを  $Y_0$  と異なる値 (たとえば  $Y_1$ ) とすることである。

短絡アドミタンス行列  $Y_{aa}$  はもともと対角行列であり、上記のような変更を行なっても依然対角行列である。すなわち

$$Y_{aa} = \begin{bmatrix} Y_{11} & 0 \\ 0 & Y_{22} \end{bmatrix} \tag{72}$$

$$\left. \begin{aligned} Y_{11} &= Y_0(\coth 3\gamma l + \coth \gamma l) \\ Y_{22} &= (Y_0 + Y_1) \coth \gamma l \end{aligned} \right\} \tag{73}$$

$Y_{ab}$  はこの変更によってつぎのように変る。

$$Y_{ab} = \begin{bmatrix} Y_{13} & Y_{14} \\ Y_{23} & Y_{24} \end{bmatrix} \tag{74}$$

$$\left. \begin{aligned} Y_{13} &= -Y_0 \operatorname{cosech} 3\gamma l \\ Y_{23} &= Y_{14} = -Y_0 \operatorname{cosech} \gamma l \\ Y_{24} &= -Y_1 \operatorname{cosech} \gamma l \end{aligned} \right\} \tag{75}$$

それゆえ中心周波数の近傍では

$$\mathbf{Y}_{aa} \cong \begin{bmatrix} 4\lambda^{-1}Y_0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-1}(Y_0+Y_1) \end{bmatrix} \quad (76)$$

$$\mathbf{Y}_{ab} \cong \begin{bmatrix} -jY_0 & jY_0 \\ jY_0 & jY_1 \end{bmatrix} \quad (77)$$

影像イミタンス行列を対角化するには  $\mathbf{Z}_{aa}$ , したがって開放アドミタンス行列  $\mathbf{Y}_{af}$  (式(57)) を対角化すればよい。そのためには式(58)の第2式を零とおいて

$$\frac{Y_{13}Y_{23}}{Y_{33}} + \frac{Y_{14}Y_{24}}{Y_{44}} = 0 \quad (78)$$

式(75)に示すように  $Y_{23}=Y_{14}$  であるから、この関係はつぎのように書き換えられる。

$$\frac{Y_{13}}{Y_{33}} + \frac{Y_{24}}{Y_{44}} = 0 \quad (79)$$

これに式(76), (77)の関係を適用すると

$$\frac{1}{4} = \frac{Y_1}{Y_0+Y_1} \quad (80)$$

の条件が要求される。すなわち

$$Y_1 = \frac{1}{3} Y_0 \quad (81)$$

とすることによって満足される。このように  $Y_1$  を選ぶと影像アドミタンス行列は対角化され

$$\mathbf{Y}_{0a} = \mathbf{Y}_{0b} = Y_0 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix} \quad (82)$$

となる。終端アドミタンスを  $Y_{1r}=Y_{3r}=2Y_0$ ,  $Y_{2r}=Y_{4r}=(2/3)Y_0$  と選ぶことにより中心周波数付近での整合と分離が著しく改善される<sup>3)</sup>。しかし終端アドミタンスがみな同じでないことや、電力配分比が1:1でないことなどの欠点もある。

## 9. 広帯域化の可能性

基本 Rat Race 回路の入力アドミタンスが正負の誘導性サセプタンス成分を有することは、短絡線路のアドミタンスをいずれかのポートに付加することにより、整合度および分離度を改善しうることを暗示するものである。

また基本 Rat Race 回路の影像イミタンス行列が対角行列になっていないことも、回路を変形してその影像イミタンス行列を対角化することによって、整合度および分離度を改善する余地のあることを示すものである。

## 10. 結 言

マイクロ波などでしばしば用いられる Rat Race 回路を新しい立場から解析した。それは

アドミタンス行列や縦続行列に基礎をおくものであり、在来公知の動作をよく説明することができた。

さらに映像パラメータ系に基づいた考察を行ない、普通の使用状態が映像パラメータ系から見ると本来不整合の生じ易い条件になっていることを示した。

この考察により広帯域化に対する提案が出てくるが、このことについては別の機会に触れたい。

最後に平素から絶えず御指導を賜わっている本学学長松本秋男先生に厚く感謝の意を表します。

#### 文 献

- 1) 伊藤健一: Rat-Race 回路の特性, 信学誌, **44-2**, 237 (1961-02).
- 2) 西出 雅, 松本秋男: 多端子網への映像パラメータ系の拡張, 信学論, **53-A-6**, 92 (1970-06).
- 3) 松本秋男: 映像パラメータによる RAT-RACE 回路の解析, 信学会回路とシステム理論研究会資料, **CT 70-14** (1970-05).