

双2次イミタンスの最少素子数構成法の研究 (第3報)

品 田 雄 治

(昭和45年5月7日受理)

Biquadratic Immittance Synthesis by the Minimum Number of Elements (Part 3)

by Yuji SHINADA

Abstract

In the preceding paper, the biquadratic immittance of two reactive five-element have been considered and it has been known that the domain that is able to be constructed only by Brune's procedure or by that of Bott-Duffin's is occupied by one of these circuits.

In succession in order to look for circuits that have the above character, immittance of three reactive five-element have been considered. These immittance are able to be reduced to the biquadratic by some condition and it has been known that among them six immittance are able to occupy that domain.

1. ま え が き

前報¹⁾において正規化した双2次イミタンス $W_{2/2} = (rb_2s^2 + a_1s + 1)/(b_2s^2 + b_1s + 1)$ をリアクタンス2素子, 抵抗3素子の回路網 $N_{3R,2X}$ で構成する場合を考察した。その結果 Foster 形または Cauer 形の展開法では構成できない, すなわち Brune または Bott-Duffin の方法によらなければ構成できない領域の一部を lattice 形の2端子回路網で構成できることと, その範囲を図上に明確に示した。しかしそのような範囲も, 正実関数として $W_{2/2}$ が存在可能な範囲と比較すると極く僅かな部分である。

今回はリアクタンス3素子, 抵抗2素子からなる回路網 $N_{2R,3X}$ を用い, 構成可能範囲がさらに拡大することを期待して考察した。 $N_{2R,3X}$ から得られる $W_{2/2}$ の回路網については Foster, Ladenheim が発表している^{2),3)} が, 構成可能範囲については考慮されておらず, この範囲を前報と同様な図を使って示したものである。

2. $N_{2R,3X}$ から得られる $W_{2/2}$

$N_{2R,3X}$ は一般的には双3次のイミタンスを示す。Foster は行列式の終結式が2つの方程式の共通根をもつ条件であることを利用して, $N_{2R,3X}$ を $W_{2/2}$ の回路網に変換した。この方法

表一 1 $W_{2/2}$ として求められる $N_{2R,ax}$ (インピーダンス) の回路定数 ($r > 1$)

インピーダンス図	共通因数	条件	求められた $W_{2/2}$ (インピーダンス)	素子値と $W_{2/2}$ の係数の関係および条件
	$R_1 + sL_1$	$L_1^2 - R_1 R_2 C L_1 + R_1^2 C L_2 = 0$	$\frac{s^2 R_1 L_2 C + s(L_1 + L_2) + R_2}{s^2 C L_2 + s C R_2 + 1}$	$R_1 = r, R_2 = 1, L_1 = (a_1 b_1 - b_2) / b_1, L_2 = b_2 / b_1, C = b_1 / b_2^2 + b_2 / b_1 \{ b_1 (1+r) - 2a_1 \} + a_1 b_1^2 (a_1 - r b_1) = 0$
	同上	同上	$\frac{s^2 L_2 C (R_1 + R_2) + s L_1 + R_2}{s^2 L_2 C + s R_2 C + 1}$	$R_1 = r - 1, R_2 = 1, L_1 = a_1, L_2 = b_2 / b_1, C = b_1 / b_2 \{ (r-1) a_1 b_1 - a_1^2 \} / (r-1)^2$
	同上	$R_2 L_1^2 - R_1 L_1 L_2 + R_1^2 R_2 L_2 C = 0$	$\frac{R_1 (s^2 C L_2 R_2 + s L_2 + R_2)}{s^2 C L_2 R_1 + s (R_1 L_2 - R_2 L_1) + R_1 + R_2}$	$R_1 = r / (r-1), R_2 = r, L_1 = r b_2 / b_1, L_2 = a_1 r, C = b_1 / a_1 \{ b_2 \{ a_1 (r-1) - b_1 r \} / (r-1)^2 \}$
	同上	同上	$\frac{s^2 C L_2 R_1 R_2 + s L_2 R_1 + R_1 R_2}{s^2 C L_2 R_1 + s \frac{L_1 + L_2}{L_1} C R_1 R_2 + R_2}$	$R_1 = 1, R_2 = r, L_1 = r a_1 b_2 / (a_1 b_1 - b_2), L_2 = r a_1, C = b_2 / a_1 \{ b_2^2 + b_2 a_1 \{ a_1 (1+r) - 2 r b_1 \} + a_1^2 b_1 (b_1 - a_1) \} = 0$
	$1 + s C R_1$	$C_1^2 R_1^2 R_2 - C_1 L R_1 + C_2 R_2 L = 0$	$\frac{R_1 \{ s^2 L C_2 R_2 + s L + R_2 \}}{s^2 L C_2 R_2 + s R_1 R_2 (C_1 + C_2) + R_1}$	$R_1 = r, R_2 = 1, L = a_1, C_1 = (a_1 b_1 - r b_2) / a_1, C_2 = r b_2 / a_1 \{ b_2^2 r^2 + a_1 b_2 \{ a_1 (1+r) - 2 r b_1 \} + a_1^2 b_1 (b_1 r - a_1) \} = 0$
	同上	$C_1^2 R_1^2 - C_1 C_2 R_1 R_2 + C_2 L = 0$	$\frac{s^2 C_2 L R_2 + s (1 + C_2 / C_1) L + R_1}{s^2 C_2 L + s C_2 R_2 + 1}$	$R_1 = 1, R_2 = r, L = r b_2 / b_1, C_1 = b_1 b_2 / (a_1 b_1 - r b_2), C_2 = b_1 / r \{ r^2 b_2^2 + b_1 b_2 \{ b_1 (1+r) - 2 r a_1 \} + a_1 b_1^2 (a_1 - b_1) \} = 0$
	$M + s L_1 L_2$	$R_1 L_1 L_2^2 = C R_2 M^2$ ここで $M = R_1 (L_1 + L_2) + R_2 L_1$	$\frac{R_2 \{ s^2 R_1 L_1 L_2^2 + s (M^2 - R_1 R_2 L_1 L_2) + M R_1 R_2 \}}{s^2 L_1 L_2^2 R_1 + s R_1 R_2 L_2^2 + M R_2 (R_1 + R_2)}$	$R_1 = r / (r-1), R_2 = r, L_1 = r b_2 / b_1, L_2 = (r-1) x^2 - a_1 b_1 r^2 x - b_1 b_2 r^2 = 0$ の x の正の實根, $C = r^3 b_1 b_2 / L_2^2 (r-1)$ $b_2^2 r^2 (r-1) + b_2 b_1 (r-1) \{ b_1 (2r+1) - 2 a_1 \} + b_1^2 (a_1 - b_1) \{ r (a_1 - b_1) - a_1 \} = 0$
	$R_1 R_2 + s T$	$C R_1 R_2^2 L_1 = T^2$ ここで $T = R_2 L_1 + (R_1 + R_2) L_2$	$\frac{L_1 \{ s^2 L_2 T (R_1 + R_2) + s L_1 R_1 R_2^2 + R_1 R_2^3 \}}{s^2 T L_1 L_2 + s (T^2 - L_1 L_2 R_1 R_2) + L_1 R_1 R_2^2}$	$R_1 = r - 1, R_2 = 1, L_1 = a_1, L_2 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4r(r-1)b_2}}{2r}, C = \frac{(a_1 + r L_2)^2}{a_1 (r-1)}$ $b_2^2 r^2 (r-1) + b_2 a_1 (r-1) \{ a_1 (2r+1) - 2 b_1 r^2 \} + a_1^2 (a_1 - r b_1) \{ a_1 - b_1 (r-1) \} = 0$
	$\sqrt{\frac{R_1 R_2}{L_1 L_2}} + s$	$R_1 L_2 \left(\frac{C R_1 R_2 + L_2}{R_2 L_1} \right) \left(\frac{C R_1 R_2 + L_1}{R_2 L_2} \right) \geq 4$	$\frac{s^2 L_1 L_2 C (R_1 + R_2) + s \sqrt{\frac{L_1 L_2}{R_1 R_2}} (R_1 L_1 + R_2 L_2 - \sqrt{R_1 R_2 L_1 L_2}) + \sqrt{R_1 R_2 L_1 L_2}}{s^2 L_1 L_2 C + s C (R_1 L_2 + R_2 L_1 - \sqrt{R_1 R_2 L_1 L_2}) + (R_1 + R_2) \sqrt{\frac{L_1 L_2}{R_1 R_2}}}$	$R_1 = \frac{r + \sqrt{r^2 - 4r}}{2}, R_2 = \frac{r - \sqrt{r^2 - 4r}}{2}$

注: 1', 4' はそれぞれ 1, 4 の 双対な回路である。

を用いて $N_{2R,3X}$ から $W_{2/2}$ となる回路網の数は 14 個あるが、7 個ずつ双対をなしている。 $W_{2/2}$ をインピーダンスとした場合に $r > 1$ となった回路網について計算結果を表-1 に示す。この表の中の 5 の回路について結果の出し方を例示しよう。回路図からインピーダンスを計算すれば

$$\dot{Z} = \frac{R_1 R_2 + s(L_1 R_1 + L_1 R_2 + L_2 R_1) + s^2 L_1(L_2 + R_1 R_2 C) + s^3 R_1 L_1 L_2 C}{R_1 + R_2 + sL_2 + s^2(R_1 + R_2)(L_1 + L_2)C + s^3 L_1 L_2 C}$$

となる。 \dot{Z} の分母分子の両式に行列式の終結式を適用して、 $C = R_1 L_1 L_2^2 / R_2 M^2$ ただし $M = R_2 L_1 + R_1(L_1 + L_2)$ の条件を得る。これをもとの \dot{Z} に代入し分子分母を因数分解して共通因数 $M + sL_1 L_2$ を得、 \dot{Z} は表-1 中に示した式となる。これと正規化した $W_{2/2}$ の式の s の係数を比較して $R_1 = r/(r-1)$, $R_2 = r$, $L_1 = rb_2/b_1$ を得る。 L_2 も $W_{2/2}$ の分子の s の一次項の係数 a_1 が $(M^2 - R_1 R_2 L_1 L_2) / MR_1 R_2$ に等しいことから求められる。最後に C は条件より $R_1 L_1 L_2^2 / R_2 M^2$ に等しいから誘導できる。 L_2 を求めるとき $W_{2/2}$ の分母の s の係数 b_1 と比較しても求められるが、この値が係数 a_1 と比較して求めた値と一致しなければならぬから、 r, a_1, b_1, b_2 の間にはある関係式が成立する。これらは一括して表-1 中に示してある。なおこの関係式は等号で成立していて、 $N_{3R,2X}$ のときの $W_{2/2}$ では関係式が不等号で示されたのと対照的である。また表-1 中の回路で $r > 1, r < 1$ のいずれでも可能な回路もあるが、ここでは $r > 1$ の場合のみを考えている。

3. $N_{2R,3X}$ の構成範囲

$r > 1$ のとき $W_{2/2}$ として存在可能な領域を図-1 に示す。この図中には Brune または Bott-Duffin の方法を用いずに構成できる範囲も示してある。表-1 中の $W_{2/2}$ かどの領域を占めるか、特に Brune, Bott-Duffin の方法によらなければ構成できない範囲を占め得るかを求めたが、その結果表-1 中の 1', 4', および 7 の回路が ladder 形では構成し得ない領域も占めることが判った。従ってこれらの回路網については経過を述べるが、他の回路については構成可能範囲の結果だけを図-2~5 に示し、その経過は省略する。

3.1 表-1 の回路 1' の構成範囲

表-1 の係数間の関係式を書き直す。

$$b_2 = \frac{a_1 \{2r^2 b_1 - a_1(1+r)\}}{2r^3} \pm \frac{a_1}{2r^3} \sqrt{a_1 \{a_1(1+r)^2 - 4r^2 b_1\}} \equiv b_{21} \pm b_{22} \quad (1)$$

b_{22} が実数でなければならないから次式を得る。

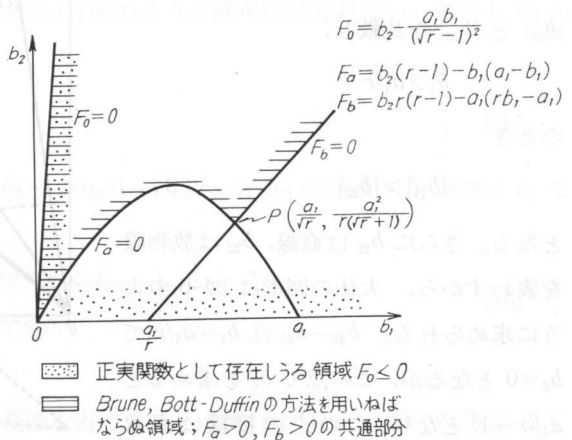


図-1

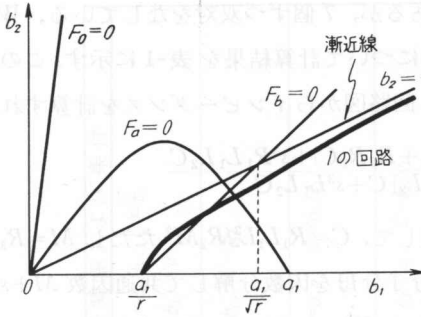


図-2 表-1の回路1の占める領域

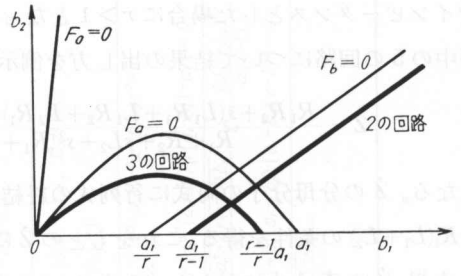


図-3 表-1の回路2, 3の占める領域

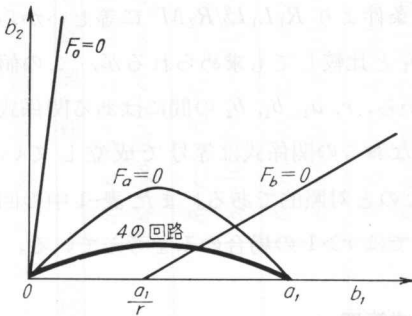


図-4 表-1の回路4の占める領域

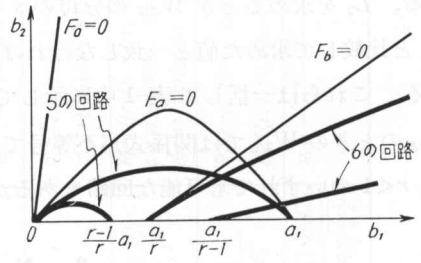


図-5 表-1の回路5, 6の占める領域

$$b_1 < \frac{a_1(1+r)^2}{4r^2} \quad (2)$$

$|b_{21}|$ と $|b_{22}|$ を比較し、

$$b_1 > a_1/r$$

のとき

$$|b_{21}| > |b_{22}| \quad (3)$$

となる。さらに b_{21} は直線、 b_{22} は放物線を表わすから、大体の図形は図-6のように求められる。 $b_{21} - b_{22}$ は $b_1 = a_1/r$ で $b_2 = 0$ となるが、この点で b'_2 を求めると $a_1/(r-1)$ となり、この点の接線は直線 $F_b = 0$ と一致することが判り、求める曲線は $F_b = 0$ の直線より上方に位置する。 b_2 の b_1 に対する微分をとると

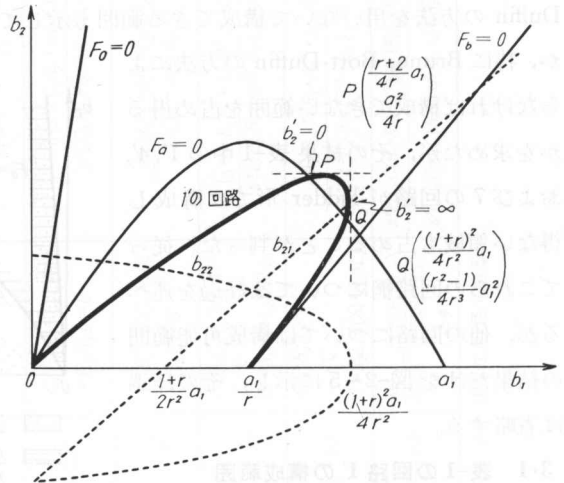


図-6 表-1の回路1'の占める領域

$$b'_2 = \frac{a_1(2r^2b_2 - 2a_1b_1r + a_1^2)}{2b_2r^3 + a_1\{a_1(1+r) - 2r^2b_1\}} \quad (4)$$

となり、 $b'_2 = 0$ の点の座標は

$$b_1 = \frac{a_1(r+2)}{4r}, \quad b_2 = \frac{a_1^2}{4r} \quad (5)$$

となる。また $b_2 = \infty$ の点の座標は

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{a_1(1+r)^2}{4r^2}, \\ b_2 &= \frac{a_1^2(r^2-1)}{4r^3} \end{aligned} \quad (6)$$

となる。これらの b_1 に対する $F_a=0$ の曲線の b_2 はそれぞれ

$$\begin{aligned} &\frac{a_1^2(r+2)(3r-2)}{16r^2(r-1)}, \\ &\frac{(1+r)^2(3r+1)}{16r^4} \end{aligned} \quad (7)$$

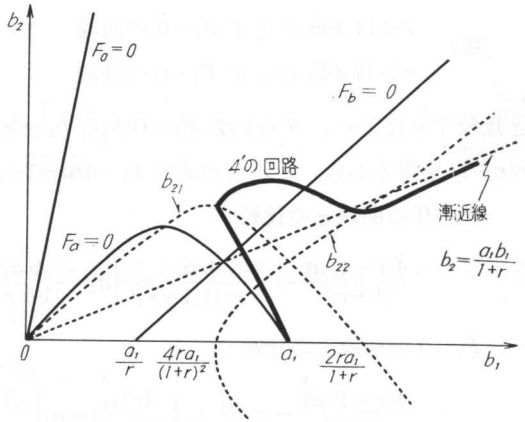


図-7 表-1の回路4'の占める領域

となり、 $r > 4 \pm 2\sqrt{3} = 7.464$, $r > 4 + \sqrt{17} = 8.123$ のとき (4), (5) 式の b_2 の値の方が、(7) 式のそれより大である。すなわち少なくとも $r > 7.464$ のときには普通の ladder 形では構成し得ない領域の一部を構成できる。

3.2 表-1の回路4'の構成範囲

1'の回路と同様に $W_{2/2}$ の係数の関係式を書き直す。

$$b_2 = b_1 \frac{\{2ra_1 - b_1(1+r)\}}{2r^2} \pm \frac{b_1 \sqrt{b_1 \{b_1(1+r)^2 - 4ra_1\}}}{2r^2} \equiv b_{21} \pm b_{22} \quad (8)$$

(8) 式は b_{21} が放物線となり、この曲線の解析は(1)式のように簡単にはならない。しかし b_{22} が実数でなければならないから

$$b_1 > \frac{4ra_1}{(1+r)^2} \quad (9)$$

の条件を得、また $b_{21}=0$ を満足する b_1 の値が $2ra_1/(1+r)$, b_{21} と b_{22} の交点の b_1 座標は a_1 であるから、

$$\left. \begin{aligned} b_{21} - b_{22} \text{ の存在範囲は } 4ra_1/(1+r)^2 < b_1 < a_1, \\ b_{21} + b_{22} \text{ の存在範囲は } 4ra_1/(1+r)^2 < b_1 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

で求められる。

この4'が ladder 形では構成し得ない範囲を占めることの検討は(1)式で用いた方法でもなし難いので、 $b_1 = 4ra_1/(1+r)^2$ における b_2 の値 ($= b_{21}$ の値 $= 4(r-1)a_1^2/(1+r)^3$) について考える。ところが $4ra_1/(1+r)^2$ と、 $F_a=0$, $F_b=0$ の交点の b_1 座標値 a_1/\sqrt{r} の大小は、 r の値によって変わる。

$$\left. \begin{aligned} r < 11.445 \text{ なら } 4r/(1+r)^2 > 1/\sqrt{r} \\ r > 11.445 \text{ なら } 4r/(1+r)^2 < 1/\sqrt{r} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

なので, $b_1 = 4ra_1/(1+r)^2$ における b_2 の値も

$$\left. \begin{array}{l} r < 11.445 \text{ のとき } F_b = 0 \text{ の曲線} \\ r > 11.445 \text{ のとき } F_a = 0 \text{ の曲線} \end{array} \right\} \quad (12)$$

と比較すればよい。すなわち $F_a = 0$ から $b_2 = b_1(a_1 - b_1)/(r - 1)$, $F_b = 0$ から $b_2 = a_1(rb_1 - a_1)/r(r - 1)$ を得るから, これらの式に $b_1 = 4ra_1/(1+r)^2$ を代入した値とを比較する。

$F_a = 0$ の曲線との比較:

$$\frac{4(r-1)a_1^2}{(1+r)^3} - \frac{4ra_1}{(r-1)(1+r)^2} \left\{ a_1 - \frac{4ra_1}{(1+r)^2} \right\} = \frac{4a_1^2(r-1)}{(1+r)^4} > 0 \quad (13)$$

$F_b = 0$ の曲線との比較:

$$\frac{4(r-1)a_1^2}{(1+r)^3} - \frac{a_1}{r(r-1)} \left\{ \frac{4r^2a_1}{(1+r)^2} - a_1 \right\} = \frac{r^2 - 8r - 1}{(1+r)^3 r} a_1^2 \quad (14)$$

(14) 式は $r > 4 + \sqrt{17} = 8.123$ のとき正になる。故に少なくとも $8.123 < r$ のときには Bott-Duffin の方法によらなければ構成できない範囲の一部を $4'$ の回路で構成し得る。なお念のため $b_1 = a_1$ ($b_{21} = b_{22}$ となる点) における b_2 の値を, $F_b = 0$ の b_2 値と比較すれば, $F_b = 0$ の b_2 値より小さいことが判る。

3.3 表-1 の回路 7 の構成範囲

先に表-1 中に示さなかった回路 7 の L_1, L_2 の求め方を示す (C は $b_2 = L_1 L_2 C$ から L_1, L_2 が求められると必ず正の実数で求められる)。 $W_{2/2}$ の係数を比較して

$$a_1 = \frac{R_1 L_1 + R_2 L_2 - \sqrt{r L_1 L_2}}{r}, \quad b_1 = b_2 \frac{R_1 L_2 + R_2 L_1 - \sqrt{r L_1 L_2}}{L_1 L_2} \quad (15)$$

を得るがこれを書き直す。

$$ra_1 - \frac{b_1}{b_2} L_1 L_2 = \sqrt{r^2 - 4r} (L_1 - L_2) \quad (16-a)$$

$$ra_1 + \frac{b_1}{b_2} L_1 L_2 = r(L_1 + L_2) - 2\sqrt{r L_1 L_2} \quad (16-b)$$

上の両式から L_1, L_2 を求め得る。(16-a) 式より

a) $b_1 L_1 / b_2 \approx \sqrt{r^2 - 4r}$ ならば

$$L_2 = \frac{ra_1 - \sqrt{r^2 - 4r} L_1}{\frac{b_1 L_1}{b_2} - \sqrt{r^2 - 4r}} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{b_1}{b_2} L_1^2 (r + \sqrt{r^2 - 4r}) - 2r L_1 \left(\sqrt{r^2 - 4r} + \frac{b_1 a_1}{b_2} \right) + ra_1 (r + \sqrt{r^2 - 4r}) \\ = 2\sqrt{r L_1 (ra_1 - \sqrt{r^2 - 4r} L_1)} \left(\frac{b_1}{b_2} L_1 - \sqrt{r^2 - 4r} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

を得る。

b) $b_1 L_1 / b_2 = \sqrt{r^2 - 4r}$ ならば

$$L_1 = \frac{b_2}{b_1} \sqrt{r^2 - 4r} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - 4r}} a_1 \tag{19}$$

$$L_2 = \frac{\frac{r a_1}{\sqrt{r^2 - 4r}} (3 - r + \sqrt{r^2 - 4r}) \pm a_1 \sqrt{\frac{r}{r - 4} (5 - 2r + 2\sqrt{r^2 - 4r})}}{r - 2 - \sqrt{r^2 - 4r}} \tag{20}$$

を得る。

これらの式は L_1, L_2 が正の実数として求められねばならないから、 a_1, b_1, b_2, r の間に制限を生じる。さらに表-1中の条件を

$$\frac{R_1 L_2}{R_2 L_1} = \frac{R_1^2}{r} \frac{L_2}{L_1}, \quad C R_1 R_2 = \frac{r \sqrt{r} b_2}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

の関係を用いて書き直す。

$$\frac{r - 2 + \sqrt{r^2 - 4r}}{2} \frac{L_2}{L_1} = \left(\frac{r \sqrt{r} b_2 + L_2 \sqrt{L_1 L_2}}{r \sqrt{r} b_2 + L_1 \sqrt{L_1 L_2}} \right)^2 \tag{21}$$

この式と(17)式から求めた L_1 の値が、(18)式の L_1 の値と一致しなければならないから、矢張り r, a_1, b_1, b_2 の間に関係が生じる。これらから7の回路で構成する条件は相当に複雑となる。しかし特に

$$r = 4, \quad R_1 = R_2, \quad L_1 = L_2 \tag{22}$$

とおいたのが Kim の回路であり、このときは $F_0 = 0$ の条件を満たしている。

4. あとがき

$N_{2R,3X}$ のうち $W_{2/2}$ になりうるものは、その数が意外に少なく、しかも ladder 形の回路では構成し得ない範囲を占めることのできる回路網の数はさらに少ない。その構成可能条件を図示すると、 $N_{3R,2X}$ の場合には面積で示されたのが $N_{2R,3X}$ では曲線上で示される。これは条件式が不等式と等式で表わされている違いである。なお $r < 1$ の場合も全く同様にして求められる。受動素子で $W_{2/2}$ を組むときは s の係数の間の条件が入って来るから構成し得る $W_{2/2}$ は限定されるかも知れない。しかし7の回路を除いて他の回路の構成領域を図上に明確化したことは回路網構成上の一つの目安になることと思う(7の回路については後日検討の機会を持ちたい)。なお $N_{2R,3X}$ が $W_{2/2}$ になる条件は行列式の終結式を用いているが、代数的な普通の方法を用いても可能であり、かつ簡単な場合もある。例えば双4次が $W_{2/2}$ になる条件⁴⁾などは行列式の方法では大変な計算になるが、

$$\frac{as^4 + bs^3 + cs^2 + ds + e}{fs^4 + gs^3 + hs^2 + is + j} = \frac{Ks^2 + Ls + M}{Ns^2 + Os + P} \cdot \frac{Qs^2 + Rs + S}{Qs^2 + Rs + S}$$

とおき、係数を比較することにより割合に簡単に条件を求め得る。その結論は

$$\frac{\pm(AE - A^2 + FD)}{AB + CD} = \sqrt{\frac{-(DBF + CAD + ABE)}{C(BF + CA - CE)}}$$

$$A^3T^4 + 2A^2SFT^3 + AS^2T^2(F^2 + CD) + TC(FD - A^2) + C(CG - AF) = 0$$

の2条件である。ただし

$$T = \frac{R}{S} = \frac{CE - BF - CA}{AB + CD}$$

$$A = ef - aj, \quad B = ah - cf, \quad C = ag - bf, \quad D = bj - eg,$$

$$E = bi - dg, \quad F = ai - df, \quad G = he - cj.$$

である。

本文の一部は昭和44年度、45年度電気連合全国大会で発表したものである。

最後に日頃絶えず御指導、御激励を賜わっている東京工業大学電子物理工学科川上教授に厚く御礼申し上げます。

参 考 文 献

- 1) 品田・川上・横沢：北見工大研究報告，Vol. 2, No. 4, Dec. 1969.
- 2) R. M. Foster: "Biquadratic Impedances Realizable by a Generation of the Five-Element Minimum-Resistance Bridges," IEEE Trans. on C. T. pp. 363-367; Sept., 1963.
- 3) E. L. Ladenheim: "Three-Reactive Five-Element Biquadratic Structures," IEEE Trans. on C.T. pp. 88-97; March, 1964.
- 4) 品田：リアクタンス4素子を含む1ポートイミタンスが双2次になる条件，昭和45年度電気四学会連合大会講演論文集。