

# 捩り疲労試験における疲労亀裂の 進展に関する一考察\*

追 分 重 義  
宇 野 和 雄

(昭和45年5月7日受理)

## A Study of Fatigue Crack Propagation in the Torsional Fatigue Test

by Shigeyoshi OIWAKE and Kazuo UNO

### Abstract

An experimental result of the investigation of the fatigue crack propagation in the torsional fatigue test of S 35 C steel is described. This study aimed mainly to obtain the mode of fatigue crack propagation and relation between the propagation and the fatigue internal energy for the plainly cylindrical specimens under repeated torsion. The X-ray half value breadth and the hardness of the surface layer of the specimens were also measured as the factors in close connection with the crack growth.

Results indicate: At any cycle of the test, (1) the crack length of the axial direction was 70 to 90% of the total crack length, (2) the propagation speed was proportional to the square root of the then crack length for each direction, and (3) the fatigue internal energy was proportional to the 1/2.5th power of the then crack length. (4) The change of X-ray half value breadth as well as the hardness during the test was appreciated in relation to the stress amplitude and the internal stress of the virgin specimen.

### 1. 緒 言

前報<sup>3),4)</sup>では炭素鋼を捩り疲れ試験する際に試験片供試部に累積する疲れエネルギーと表面層のX線半価幅、硬度との相関を求めた。応力振幅、供試部材の内部応力等が半価幅や硬度に及ぼす影響が評価された。

疲れ問題研究の重要性は、その使用条件が日を追って苛酷さを増す機械や構造物を、材料破壊の多くを占める疲れ破壊から守ることにあるといえる。疲れ亀裂進展の究極が疲れ破壊であることはいうまでもない。本研究はS 35 C平滑試験片に両振り捩りを加えて、サイクルの進行に伴う疲れ亀裂進展の態様、亀裂進展と疲れ内部エネルギーとの関連等を調べたもので

\* 日本機械学会北海道支部第14回講演会(1970. 10. 18. 北見)にて講演

ある。平滑試験片の捩り疲れ亀裂の進展については従来十分に研究されておらず、本研究は若干の新しい知見を与えるものと考える。

## 2. 実験

### (1) 疲労試験等

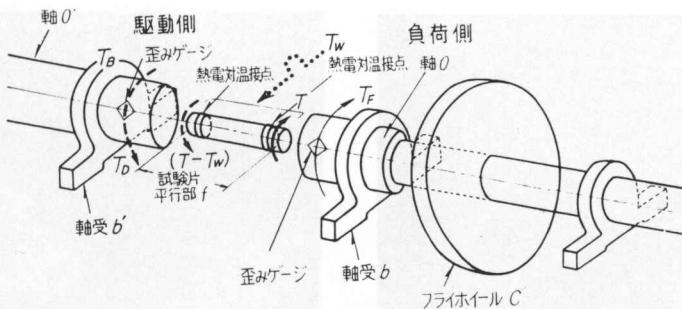
試験機は準共振式曲げ捩り疲労試験機。繰返し速度は 900 r.p.m. である。供試材、試験片、計

第1表 供試材の諸性質

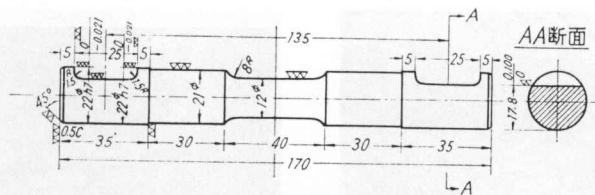
材 料		S 35 C				
化 学 成 分 (%)		C	Si	Mn	P	S
		0.32	0.26	0.64	0.015	0.013
機械的性質	引張り	生 材	降伏点 52 kg/mm <sup>2</sup>	抗張力 70 kg/mm <sup>2</sup>	延伸率 30%	収縮率 71%
		焼鈍材	降伏点 33.2 kg/mm <sup>2</sup>	抗張力 57.1 kg/mm <sup>2</sup>	延伸率 40%	収縮率 64%
	捩り	焼鈍材	降伏捩り応力 20.3 kg/mm <sup>2</sup>	捩り破壊係数 54.2 kg/mm <sup>2</sup>	耐久限度 11.5 kg/mm <sup>2</sup>	剪断弾性係数 8,203 kg/mm <sup>2</sup>
		焼 鈍	840°C に 30 分間焼鈍、後炉中冷却			

第2表 諸元の記号の説明

記 号	単 位	内 容	備 考
N	cycle	繰返し数	
N <sub>F</sub>	cycle	破壊繰返し数	
T	mmkg	供試部への入力トルク	
T <sub>W</sub>	mmkg	供試部に非可逆的に失われるエネルギーに振向かれるトルク	
θ	°C	供試部表面の温度と周囲温度との差	
W	10 <sup>-6</sup> kcal/cycle	1 サイクル中に試験入力が供試部に不可逆的に消費する全機械仕事の熱当量	算定式は前報 <sup>10),11)</sup> の通り
Q	10 <sup>-6</sup> kcal/cycle	1 サイクル中の供試部の発熱量	同 上
S	10 <sup>-6</sup> kcal/cycle	1 サイクル中の供試材疲労内部エネルギーの増加	
U	kcal	ある繰返し数までに供試材に蓄積される疲労内部エネルギー	
Ū	kcal	破壊繰返し数までに供試材に蓄積される疲労内部エネルギー	
q <sub>a</sub>	10 <sup>-9</sup> kcal/cycle <sup>2</sup>	サイクル進行に伴うサイクル当たり Q の増加の割合	算定式は前報 <sup>10),11)</sup> の通り
B	mm	応力繰返前の X 線半価幅	
b	mm	ある繰返し数における X 線半価幅	
H <sub>V</sub>	Vickers Hardness	応力繰返前の微小硬度	
H <sub>v</sub>	Vickers Hardness	ある繰返し数における微小硬度	



### 第1図 疲労試験中の計測

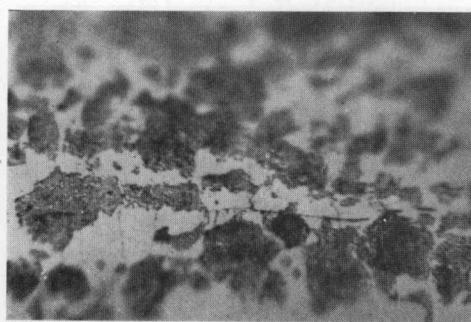


第2図 試験片の形状、および寸法

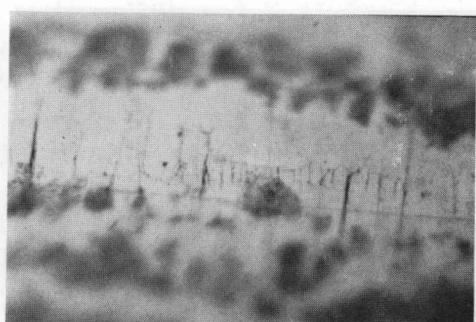
測系、疲労累積関連諸量の算定式ならびに X 線回折線半価幅、硬度測定の機器、方法は前報<sup>1)~4)</sup>と同じであるので説明を避け、上記事項の一部を第 1、2 表ならびに第 1、2 図として掲載した。

(2) 亀裂の撮影ならびに長さの測定

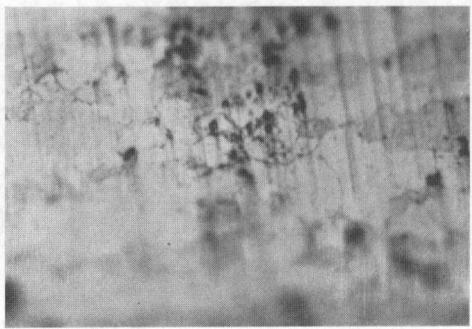
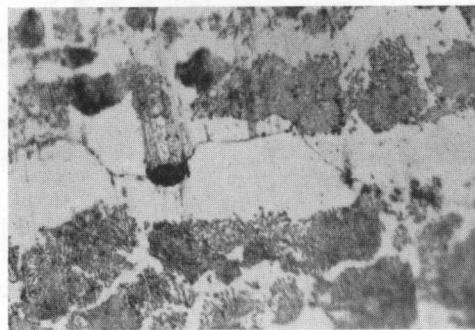
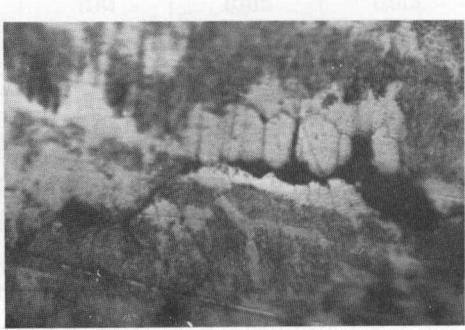
繰返し試験中、対数間隔がほぼ等しくなるようなサイクルで試験機を停止、試験片をこれより取り外し、X線半価幅、微小硬度、表面亀裂長さの測定および撮影をおこなった。応力振幅は $\tau=16\text{ kg/mm}^2$ 前後とした。第3図(a)～(f)および第4図(a)～(h)は顕微鏡倍率それぞれ200および1300の写真である。写真の左右および上下方向は試験片のそれぞれ軸および円周方向である。第3図の写真が円周方向にピントの合ひ方の傾斜を持つのはレンズの焦点深度の関係からであって、一視野につき対物レンズを上下して5,6枚撮影し、該視野内の円周方向全長に亘り亀裂を追跡、観察しやすくした。しかし第3図にはこの内の1枚のみを載せた。第



(a)  $\tau = 16.5 \text{ kg/mm}^2$ ,  $N = 1 \times 10^4$  cycles



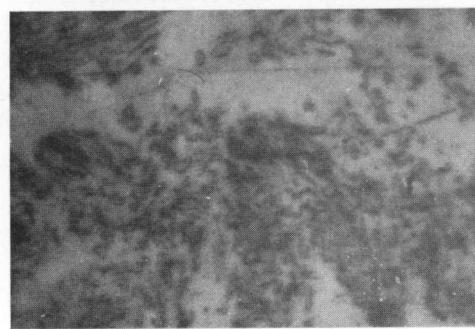
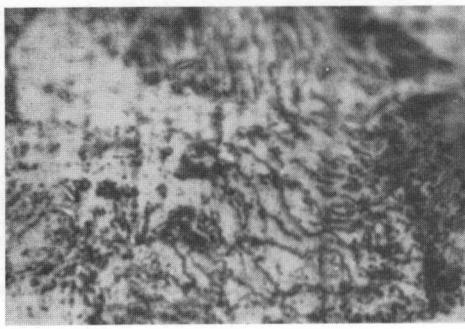
(b)  $\tau = 16.3 \text{ kg/mm}^2$ ,  $N = 2 \times 10^4$  cycles

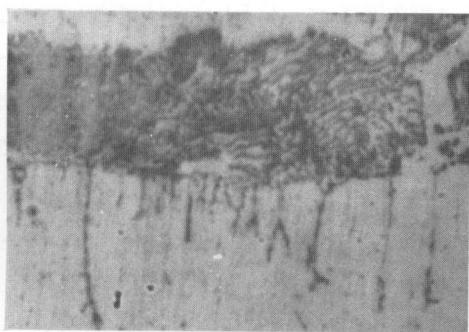
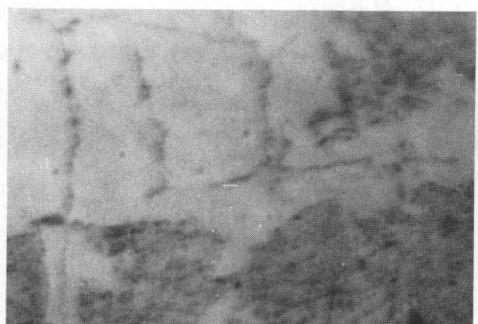
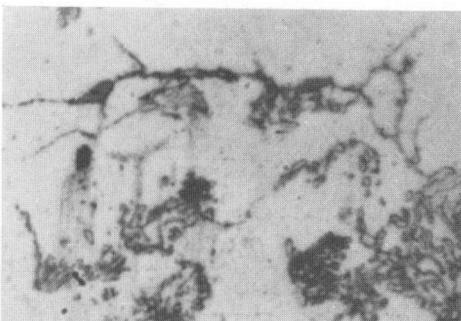
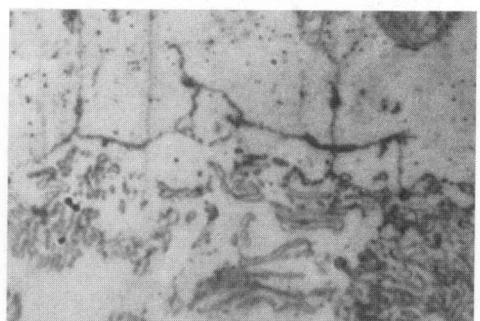
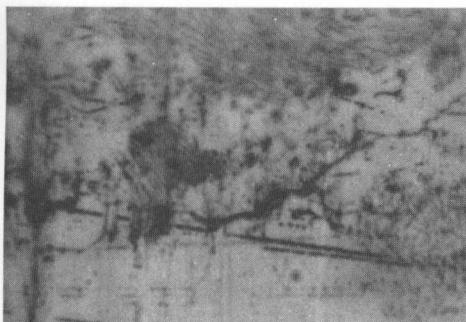
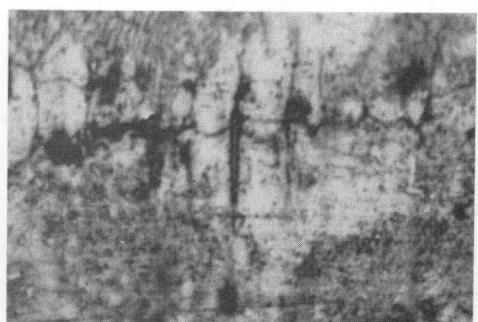
(c)  $\tau = 15.9 \text{ kg/mm}^2, N = 3 \times 10^4 \text{ cycles}$ (d)  $\tau = 16.9 \text{ kg/mm}^2, N = 3 \times 10^4 \text{ cycles}$ (e)  $\tau = 16.1 \text{ kg/mm}^2, N = 4.5 \times 10^4 \text{ cycles}$ (f)  $\tau = 15.9 \text{ kg/mm}^2, N = 4.5 \times 10^4 \text{ cycles}$ 

第3図(a)～(f) 応力振幅  $\tau = 16 \text{ kg/mm}^2$ (約) 試験における種々のサイクルに対する亀裂の顕微鏡写真 ( $\times 200$ )

4図の写真では視野表面の曲率と焦点深度が合い、円周方向ボケは見られない。

表面亀裂長さは視野  $0.25 \text{ mm} \times 0.25 \text{ mm}$  を倍率 200 で覗きながら、軸、円周および斜方向別に亀裂長さを記録した。ただし円周 12 等分の円柱母線の全長に沿い軸方向に走査した亀裂長さを全円柱表面に換算したものを表面亀裂長さとした。この便法は、数個体については全面走査観測し、その値と 12 方向からの走査の値とが走査面積に対応した事実から認容した。斜方向は  $45^\circ \pm 10^\circ$  くらいにバラついていたが、平均  $45^\circ$  といえた。

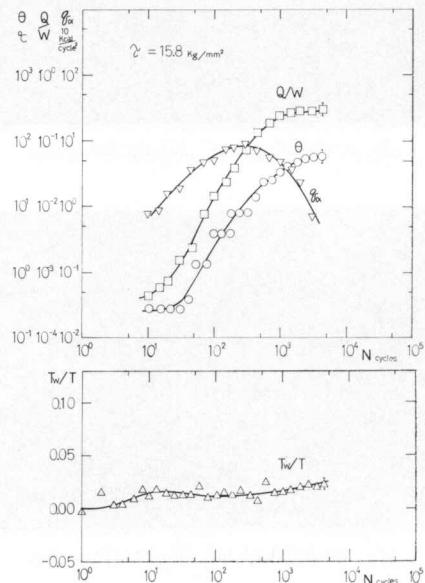
(a)  $\tau = 15.8 \text{ kg/mm}^2, N = 4.5 \times 10^3 \text{ cycles}$ (b)  $\tau = 16.3 \text{ kg/mm}^2, N = 1 \times 10^4 \text{ cycles}$

(c)  $\tau = 16.5 \text{ kg/mm}^2, N = 1 \times 10^4 \text{ cycle}$ (d)  $\tau = 16.2 \text{ kg/mm}^2, N = 2 \times 10^4 \text{ cycles}$ (e)  $\tau = 15.9 \text{ kg/mm}^2, N = 3 \times 10^4 \text{ cycles}$ (f)  $\tau = 16.9 \text{ kg/cm}^2, N = 3 \times 10^4 \text{ cycles}$ (g)  $\tau = 16.1 \text{ kg/mm}^2, N = 4.5 \times 10^4 \text{ cycles}$ (h)  $\tau = 15.9 \text{ kg/mm}^2, N = 4.5 \times 10^4 \text{ cycles}$ 第4図(a)～(h) 応力振幅  $\tau = 16 \text{ kg/mm}^2$ (約) 試験における種々のサイクルに対する亀裂の顕微鏡写真 ( $\times 1300$ )

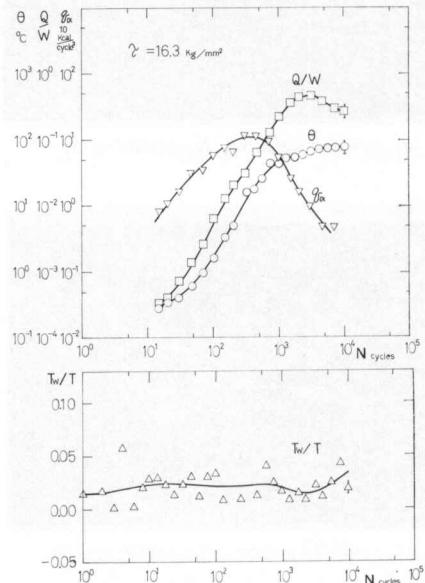
### 3. 実験結果と考察

第5図(a)～(h)は亀裂を調べた試験片の  $T_w/T, \theta, Q/W, q_a \sim N$  曲線である。各曲線の右端あたりをよぎる短い線は停止サイクルを示す印である。第6図(a)および(b)は疲れ試験の4群に対するそれぞれ  $b/B \sim N$  および  $H_v/\bar{H}_v \sim N$  曲線である。各群に属する個体ごとの応力振幅はおおむね同じで、その平均値を  $\tau_{\text{mean}}$  で示した。

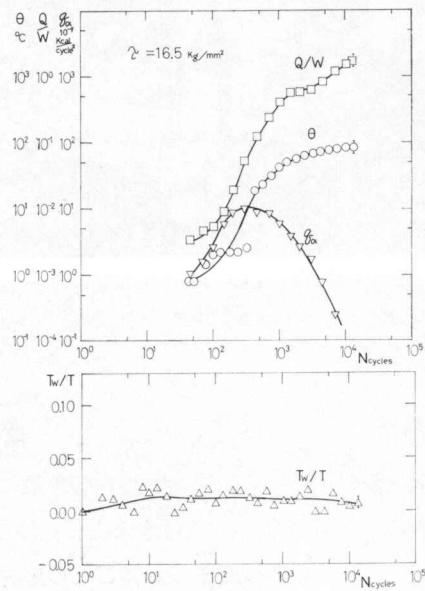
(1) 第6図(a)。応力振幅  $\tau_{\text{mean}} = 12.2 \text{ kg/mm}^2$  は耐久限度  $\tau_w = 11.5 \text{ kg/mm}^2$  にきわめて近く、 $10^2$  サイクル前後以降では半価幅  $b$  は処女材の半価幅  $B$  より約 1% 増した状態を保っている。 $\tau_{\text{mean}} > 16.2 \text{ kg/mm}^2$  では応力サイクルの開始とともに  $b/B$  は漸減している。応力振幅の高いほど減少速度はより大で、より早いサイクルで  $b/B$  は最小値に達している。しかしここで



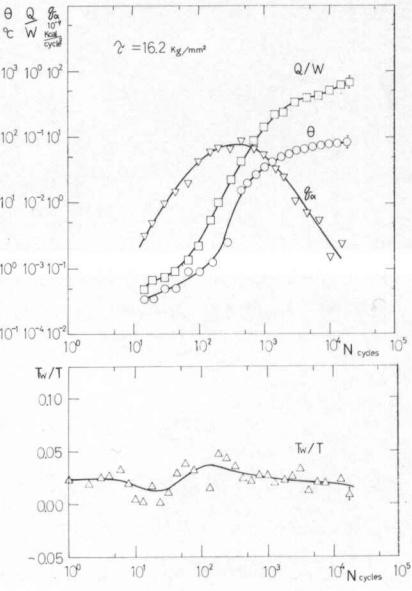
第5図(a)



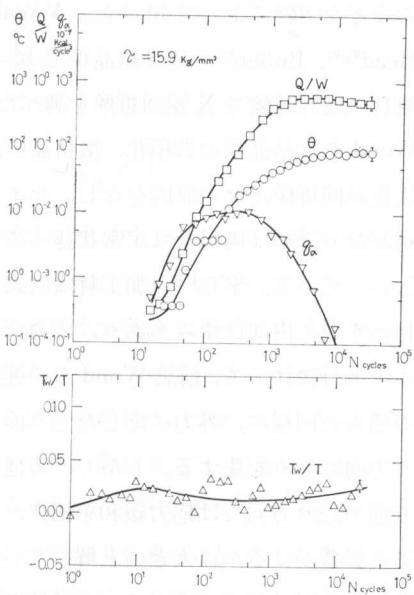
第5図(b)



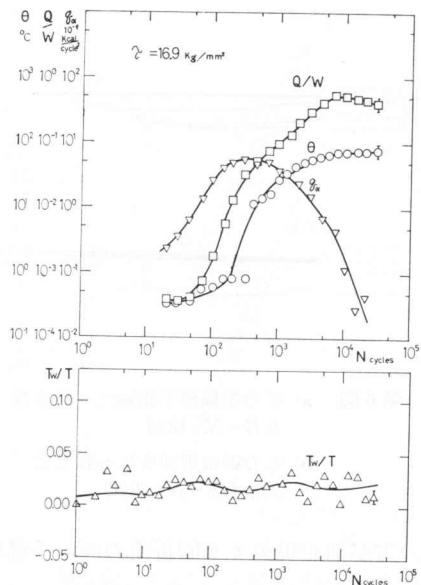
第5図(c)



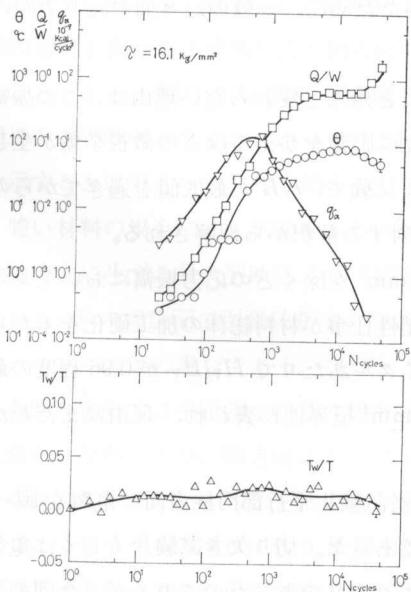
第5図(d)



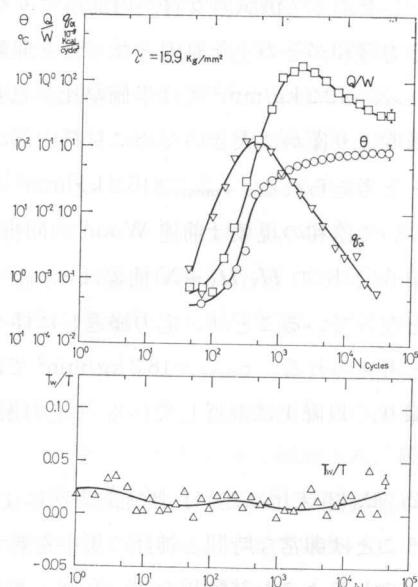
第5図(e)



第5図(f)



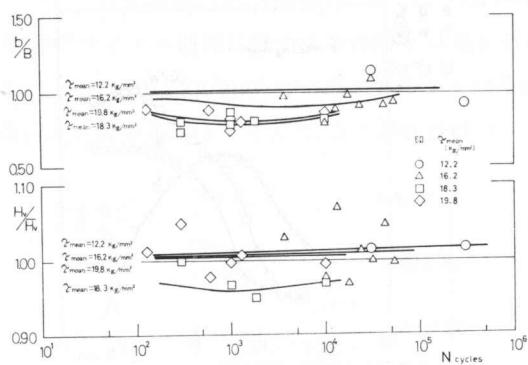
第5図(g)



第5図(h)

もこの傾向の順序は  $\tau_{mean} = 16.2, 19.8, 18.3 \text{ kg/mm}^2$  の順で、応力振幅  $18 \text{ kg/mm}^2$  境界性が見られる。

さて X 線計数管法における半価幅比  $b/B$  の増加は写真法における X 線回折環のボケ、その減少は鮮明化に対応する。Pfarr<sup>5)</sup>, Hempel<sup>6)</sup>, Head<sup>7)</sup> らは加工材では X 線回折像が環状とな



第6図 (a) 応力振幅別半価幅比～繰返数  
( $b/B \sim N$ ) 線図  
(b) 応力振幅別硬度比～繰返数  
( $H_v/H_{v\bar{v}} \sim N$ ) 線図

ることを実験によって知った。Wood<sup>9)</sup>, Head<sup>8), 9)</sup>, Bullen<sup>8)</sup> らは多結晶純金属の焼鈍材の疲れ試験で X 線回折像を調べたが、Wood らは結晶粒の微細化、微結晶の副方位化が回折像ボケの原因をなし、サイクルがかなり進めば両現象は定常状態に達するといっている。平ら<sup>10)</sup>は加工材は供試処女材にすでに内部ひずみがあり、応力サイクルの進行に伴って、前記 Wood らの焼鈍材の場合と同様に、外力に応じた辺り面や辺り方向に辺りを生ずる。しかし一方他の辺り面や辺り方向では応力緩和を招き、この

現象の方が前記現象より回折環の鮮、不鮮明化に与える影響がはるかに大きいと解している。

第6図(a)において、応力振幅  $\tau_{mean} = 16.2, 18.3$  および  $19.8 \text{ kg/mm}^2$  サイクル試験における  $10^3 \sim 10^4$  サイクル辺までの  $b/B$  の減少は、本供試材の原材は焼鈍したが、切削成形後は焼鈍せず、したがって供試処女材が内部ひずみを持っていたために、一般の辺り面や辺り方向に生じた応力緩和がその主な原因となったと理解される。

$\tau_{mean} = 12.2 \text{ kg/mm}^2$  では半価幅比が処女材のそれと殆んど変わらない理由は、この振幅が耐久限度より僅かに大きいために材料内部に半価幅比に影響を与えるほどの微視挙動が生じないことと考えられる。 $\tau_{mean} \geq 16.2 \text{ kg/mm}^2$  のサイクル試験で、 $b/B$  が最低値を過ぎてからの増大、ついで飽和の現象は前述 Wood の回折環ボケに対する解釈から理解される。

第6図(b)の  $H_v/H_{v\bar{v}} \sim N$  曲線は  $\tau_{mean} = 18.3 \text{ kg/mm}^2$  を除くどの応力振幅においても増加曲線となっていることは、応力繰返しに伴う微視的塑性仕事が材料総体の加工硬化をもたらした故と考えられる。 $\tau_{mean} = 18.3 \text{ kg/mm}^2$  では  $10^3$  サイクルあたりで  $H_v/H_{v\bar{v}}$  が 0.96 程度の最低値を探り、以降 1 に漸近している。応力振幅  $18 \text{ kg/mm}^2$  境界性が表われ、理由はまだわからない。

(2) 2. (2) 末尾に述べた便宜的方法によても平滑試験片平行部円柱表面の亀裂を調べるということは非常に時間と神経の集中を要する仕事であった。切り欠き試験片もしくは亀裂集中が得られるような試験片を用いれば、この仕事はより容易であったのであるが、今回の研究目的を達成するために平滑試験片を用いた。というのは筆者らは従来疲れエネルギー累積を疲労部総体についてとらえ、微視的塑性仕事に伴う発熱も積極的に考慮に入れる研究を平滑試験片で続けており、この研究もその一環であるからである。なお切り欠き試験片等を用いるときは、切り欠きによる諸現象も考慮しなければならず、従来の平滑試験片を用いての研究結果<sup>1)~4)</sup> を直接参照することができない不便もあったからである。

Hunter ら<sup>11),12)</sup> はアルミニウム合金の曲疲げれ試験をおこない、亀裂長さを調べ、平滑および切り欠き試験片に対して亀裂進展速度を調べ、

$$\frac{dl}{dN} \propto l \quad (1)$$

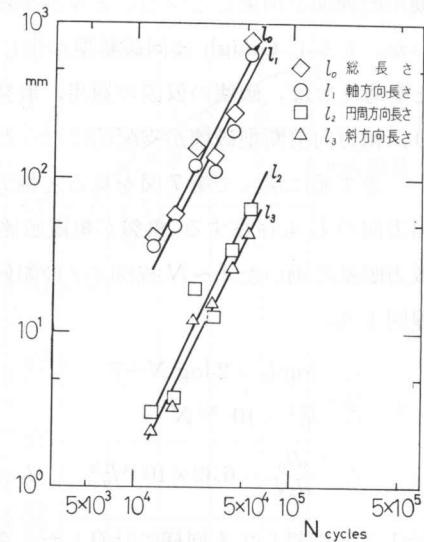
なる関係を得ている。しかし振り試験については①式のような式は提示されていない。

筆者らは実験値を置点し第7図  $l_i \sim N$  曲線を得た。 $i=0, 1, 2$  および  $3$  はそれぞれ総、軸方向、円周方向および斜方向長さを表す。 $10^4 \sim 10^5$  のどのサイクルでも軸方向亀裂長さが総亀裂長さの 7~9 割を占めている。Neuber<sup>13)</sup> は亀裂の方向線上、亀裂の先端より離れて存在する点が、あるサイクルで剪断塑性ひずみ振幅の累積による破壊ひずみの定值を持ったときに、その点に亀裂が発生するといっている。McClintock<sup>14)</sup> は亀裂の進展方向と最大剪断ひずみの方向とがかなり一致するとの実験結果を得ている。Gough<sup>15)</sup> は今回の供試材と同じ 0.35% C 鋼の繰返し振りでは破壊形式が軸方向剪断型なることを報告していて、筆者らの場合と同じであるといえる。同時に Gough は軟鋼や 0.65% C 鋼は螺旋破断型、純鉄や空中焼入 Ni-Cr 鋼は円周方向剪断型なることを述べている。鉄鉄やチヨークのような脆い非金属材料は螺旋破断型を示すことは筆者らのかねて知るところであり、Lessells<sup>16)</sup> のいうところもある。

脆い材料の場合には、試験片がその摺み部から加えられる振りモーメントによって円周または軸方向に生ずる最大剪断応力面で剪断破壊する前に、粒子の結合力が弱いために主応力面すなわち  $45^\circ$  の螺旋面で引張破断する静試験と同じように考える。上記の軟鋼、0.65% C 鋼、鉄鉄、チヨーク等の場合である。

今回の実験では平行部の任意の軸方向位置の円周方向表面に沿っては亀裂分布の不均一は特に見られなかったが、軸方向に沿っては負荷側端には他部よりも多く観測され、破断の多くも此處で生じた。このことは筆者らがさきに平行部の負荷側、中央部および駆動側の 3 部位についてサイクルの進行に伴う X 線半価幅の変化を調べ、これにもとづいて  $10^4 \sim 10^5$  サイクル近辺では表皮応力は負荷側で最大、中央部、駆動側の順に小さくなっていることを推論した実験結果<sup>3),4)</sup> と符合すると考えられる。

Gough が 0.35% C 鋼が軸方向剪断型をとるといっていることは前述したが、彼はその理由に言及していない。本実験でも同破断型が支配的なことが観測されたわけである。本来亀裂が軸および円周方向剪断型になる確率は同じであるはずであるが、平行部の軸方向に沿って負荷側より駆動側へと減ずる応力勾配があること、試験片の形状効果、試験片の摺みの構造が試



第7図 亀裂長さ～繰返し数 ( $l_i \sim N$ ) 線図

験片の伸縮を拘束していること等がからみ合い軸方向剪断型を支配的にしてゐるのではあるまいか。しかし Gough は同破断型が生じたのは 0.35% C 鋼の場合であることを記述していることを考えれば、破壊の仮説の適用、亀裂相互の連絡より破壊への過程を調べることも必要であり、軸方向剪断型破壊が支配的になった理由の解明はかなり難しいと思われる。

さて元に戻って第 7 図を見ると軸方向亀裂長さ  $l_1$  に比べれば遙かに短いが円周方向の  $l_2$ 、斜方向の  $l_3$  も存在する。亀裂が組織敏感性であり、確率的な存在であることを示している。両対数方眼紙に画いた  $l_i \sim N$  線図が  $i$  の如何にかわらず同一勾配の直線であることは興味深い。線図より、

$$\log l_0 = 2 \log N - 7$$

$$\therefore l_0^{1/2} = 10^{-3.5} N \quad (2)$$

$$\therefore \frac{dl_0}{dN} = 6.32 \times 10^{-4} l_0^{1/2} \quad (l_0 \text{ は mm}) \quad (3)$$

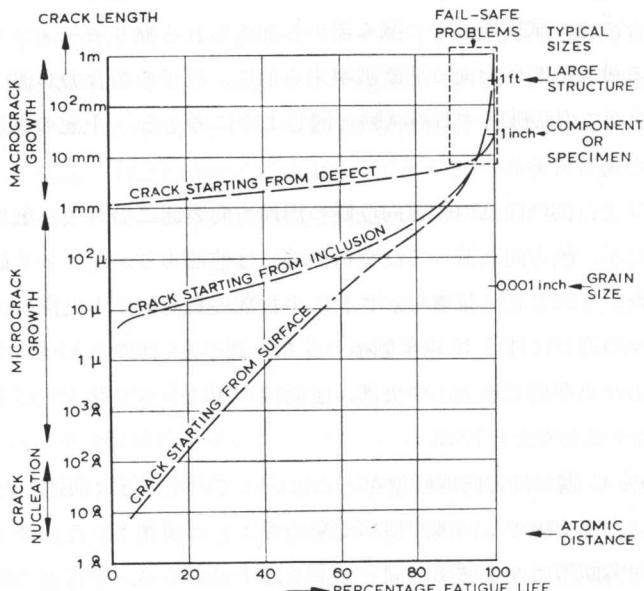
$i=1, 2, 3$  に対しても同様に計算した。各方向の亀裂進展速度は、

$$\frac{dl_i}{dN} = K_i l_i^{m_i} \quad (l_i \text{ は mm}) \quad (4)$$

$$K_0 = 6.32 \times 10^{-4}, \quad K_1 = 5.63 \times 10^{-4}, \quad K_2 = 2.00 \times 10^{-4}, \quad K_3 = 1.66 \times 10^{-4}$$

$$i = 0, 1, 2, 3 \text{ に対し } m_i = 1/2 = \text{一定}$$

(3) 2.(2) 項下の倍率 200 の顕微鏡による亀裂長さの測定では、繰返し数比 20% 以下のサイクルにおける亀裂を認知できなかった。疲れ過程の順序は塑性になり、微視亀裂発生、亀裂の



第 8 図 Schijve の模式線図

成長、そして破壊に至ることは現在明らかになっている。第8図はSchijve<sup>17)</sup>が発表している亀裂伝播の模型的線図であって、亀裂の発生源を一般表面、介在物および欠陥に区分し、この区別に亀裂の生長を示している。しかし彼らはこの図が傾向を表わしたもので、確かな実験にもとづいたものでないことを付言している。

第9図は筆者らの今回の実測を前記Schijveの図の形式に表わしたものであって、亀裂発生源区分はおこなっていないが、倍率200の顕微鏡測定による亀裂長さの実測値のオーダを与えたものとして意義ある線図と考える。

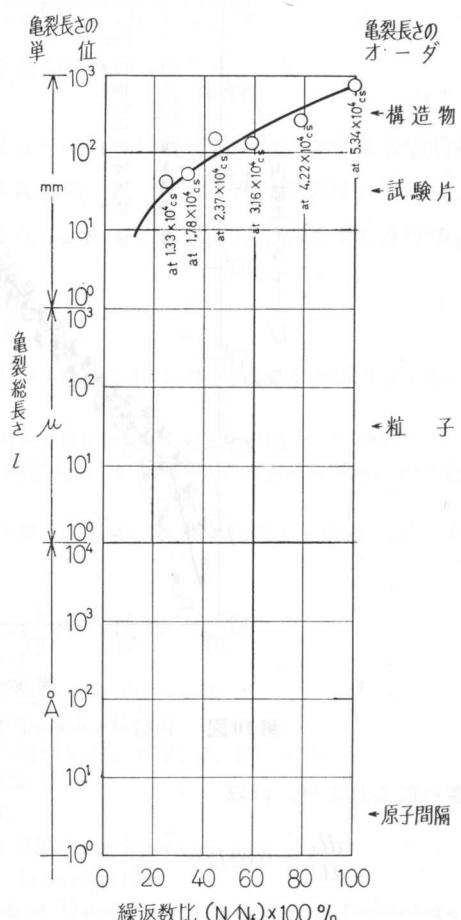
第5図。応力振幅  $\tau = 16 \text{ kg/mm}^2$  辺では  $q_{\alpha \max}$  は  $10^2 \sim 10^3$  サイクル間で生ずる。これは微視的塑性仕事がサイクル初期に急激に増大し、サイクル当たりのこの仕事による発熱量の増加率  $q_{\alpha}$  がこの期間に最大値に達したことを意味する。半価幅比  $b/B$  は  $10^3 \sim 10^4$  サイクル間で最低値に達し、この辺りから辺り帶が形成し、結晶粒が微細化し、 $\text{\AA}$  単位の原子間隔大の亀裂が発生、生長し、 $\mu$  単位の組織粒大、 $10^4$  サイクル辺で mm 単位の試験片大、 $5 \times 10^4$  サイクル辺でついに約 1 m の総亀裂長さに達する有様が第3および4図の顕微鏡写真、第9図等からうかがえる。

(4) 第10図は  $U, l_0 \sim N$  曲線である。 $U$  は第2表に示すように、応力サイクルの始めから  $N$  サイクルまでに供試部に蓄積される疲れ内部エネルギー、同図での単位は  $10^{-6} \text{ kcal}$ 、 $l_0$  mm は同サイクルにおける亀裂総長さである。ただし同図は亀裂長さを測定した  $\tau_{\text{mean}} = 16.2 \text{ kg/mm}^2$  群の疲れ試験に対するものである。

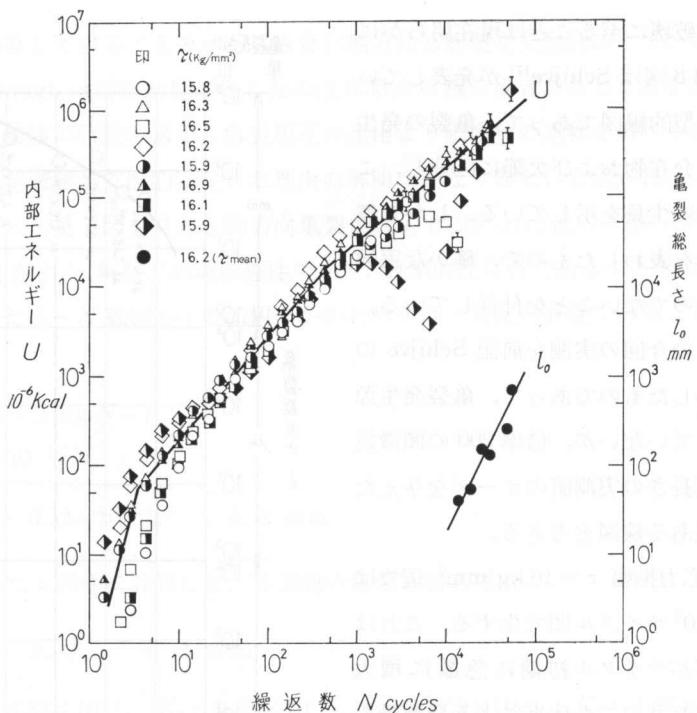
$$U = U(N) = \int_{N=1}^N \{W(N) - Q(N)\} dN \quad (5)$$

疲れ亀裂の長さを顕微鏡下で測定できた  $10^4 \sim 10^5$  サイクル間の  $U$  と  $l_0$  の関係が(2)式とこの線図から求まり、

$$U = 83.7 l_0^{1/2.5} \quad (U \text{ は } 10^{-3} \text{ kcal}, l \text{ は } \text{mm}) \quad (6)$$



第9図 亀裂総長さ～縦返数比 ( $l \sim N/N_f$ ) 線図

第10図 内部エネルギー、亀裂総長さ～繰り返し数 ( $U, l_0 \sim N$ ) 線図

さらにこれより、ほぼ

$$\frac{dl_0}{dU} = 0.03 l_0^{1/1.7} \quad (7)$$

#### 4. 結 言

機械構造用炭素鋼 S 35 C の振り疲労試験をおこない、応力サイクルの進行に伴う表面亀裂の進展を主に、ほかに疲労累積エネルギーや表面層の X 線回折線半価幅や微小硬度等を調べた結果およびこれらの相関を求めた結果を下に要約する。応力振幅は  $16 \text{ kg/mm}^2$  前後を加えた。

- (1) 応力サイクルの進行に伴う X 線回折線半価幅や硬度の変化は供試材が加工成形後焼鈍しなかったこと、応力振幅の大きさ等に関連して理解された。
- (2) 疲れ過程の任意サイクルにおいて総亀裂長さの 7 ないし 9 割は軸方向亀裂長さが占め、ついで円周方向、約  $45^\circ$  方向の順になっていた。倍率 200 の顕微鏡測定による疲れ破壊時の総亀裂長さは 1 m 弱であった。
- (3) 亀裂のサイクル当たりの進展速度は軸、円周、 $45^\circ$  方向ならびに総長さのそれぞれについて、その測定サイクルのそれぞれの亀裂長さの平方根に比例し、比例定数は総長さ、軸、円周および  $45^\circ$  方向の順に小さくなつた。

(4) あるサイクルの疲れ内部エネルギーはそのサイクルの総亀裂長さの 1/2.5 乗に比例し、単位内部エネルギー当たりの総亀裂長さの増分は総亀裂長さの 1/1.7 乗に比例した。

本報告を終えるに当たり、本研究に多くの御助言を賜わった北海道大学工学部半沢宏教授に衷心より感謝申しあげる。さらに本学機械工学科佐伯義二氏、阿部清氏は試験片の製作に、埴山祥博氏は疲労試験の実施に最大の努力をしてくださされたことに対し厚く御礼申しあげる。

### 文 献

- 1) 追分重義・宇野和雄： 捷り疲労試験における疲労累積の実験的研究、日機会道支部 12 回講演論文集、昭 43. 11.
- 2) 追分重義・宇野和雄： 捷り疲労試験における疲労累積の実験的研究、北見工大研報、2, 3 (1969).
- 3) 追分重義・宇野和雄： 捷り疲労累積の X 線ならびに硬度検査による評価、日機会道支部創立 10 年記念 13 回講演論文集、昭 44. 10.
- 4) 追分重義・宇野和雄： X 線回折線半価幅と硬度検査を伴う炭素鋼の疲労累積に関する研究、北見工大研報、2, 4 (1969).
- 5) Pfarr: Z. Tech. Phys., 14 (1933), 220.
- 6) M. Hempel: Mitt. Kais-Wilh. Inst. Eisenforsch 20 (1938), 15, 229.
- 7) A. K. Head: Proc. Roy. Soc. Lond., 85 (1957), 160.
- 8) F. P. Bullen and A. K. Head: Proc. Roy. Soc. Lond., 216 (1953), 332.
- 9) W. A. Wood and A. K. Head: J. Inst. Metals, 79 (1951), 89.
- 10) 平 修二・本田和男： X 線による金属材料疲れ破壊に関する研究、機論、26, 167 (昭 35. 7).
- 11) M. S. Hunter et al.: Proc., ASTM, 56 (1956), 1038.
- 12) M. S. Hunter et al.: Proc., ASTM, 57 (1957), 642.
- 13) H. Neuber: Kerbspannungslehre, Zweite Auflage (1958), Springer.
- 14) F. A. McClintock: Int. Conf. Fatigue of Metals (London), (1956).
- 15) H. J. Gough: Unpublished notes of lectures given at Massachusetts Institute of Technology, 1937.
- 16) J. M. Lessells: Strength and Resistance of Metals, J. Wiley & Sons (1961), 312.
- 17) J. Schijve: Fatigue Crack Propagation, ASTM STP 415, Am. Soc. Testing Mats., 1967, p. 415.