

双2次イミタンスの最少素子数構成法の研究 (第2報)

品 田 雄 治

川 上 正 光*

横 沢 美 紀**

(昭和44年4月30日受理)

Biquadratic Imittance Synthesis by the Minimum Number of Elements (Part 2)

by Yuji SHINADA, Masamitsu KAWAKAMI and Miki YOKOZAWA

Abstract

In the preceding paper, the characteristics of a biquadratic imittance have been investigated and its loci, the condition of the positive real function, and the conditions of the synthesis by Brune's or by Bott-Duffin's and by augmentationless Miyata's procedure—have been shown in figures.

In succession all biquadratic imittances that are able to be constructed by two-reactive five-element structures have been looked for and these synthesizable domains have been shown in figures and compared. As a result, it has been known that a portion of the domain that is able to be constructed only by Brune's procedure or by that of Bott-Duffin's is occupied by one of these circuits and the domain has been shown definitely.

1. ま え が き

前報¹⁾において双2次イミタンス $W_{2/2}$ の一般的性質を考察した。そしてこれを Brune, または Bott-Duffin の方法, および宮田の昇次法を用いないで構成する場合に, $W_{2/2}$ の係数の取りうる範囲を図示し, これを回路 $N_{2R,2X}$ (抵抗2素子, リアクタンス2素子—ただし相互誘導係数 M を含まない—からなる回路) で構成するときの係数の範囲と比較した。

本報では $W_{2/2}$ を抵抗3素子, リアクタンス2素子 (M を含まない) の回路 $N_{3R,2X}$ について, その構成素子値と $W_{2/2}$ の係数の間の関係を求め, かつ構成可能範囲を図示した。その結果一般的な $W_{2/2}$ の係数の取りうる範囲内で, $N_{3R,2X}$ が占める領域が明瞭になり, かつ Brune, または Bott-Duffin の方法を用いなければ構成できない範囲についても, その一部を $N_{3R,2X}$ の中のある回路で構成しうることに, その場合の範囲が明確になった。

* 東京工業大学電子物理工学科教授

** NHK 技術研究所

2. $W_{2/2}$ を構成できる $N_{3R,2X}$

5 素子で構成しうるすべての接続法の組み合わせを表-1 に示す。この表から 25 通りの接続法が得られるが、リアクタンス X の 2 素子が同じ種類の場合については、その双対性からいづれか一方の X についてのみ考慮すればよい。本文では C が 2 個含まれる場合を考えた。 X

表-1 5 素子で接続可能なすべての組み合わせ

I	1		25	II	5		21'	III	10		16'	IV	17		9'
	2		24'		6		20'		11		15'		18		8'
	3		23'		7		19'		12		14'		19		7'
	4		22'		8		18'		13		13'		20		6'
II	3		23'	III	8		18'	IV	14		12'	V	21		5'
	4		22'		9		17'		15		11'		22		4'
	3		23'		16		10'		16		10'		23		3'
	4		22'		17		17'		16		10'		24		2'
は双対な回路を示す															

の 2 素子が異なる種類の場合も、その双対性から 13 通りの接続法について考慮すればよい。さらに抵抗 R のみの 3 素子で $A(Y)$ 接続されている場合は、必ず $Y(A)$ に変換することができる。したがってどちらか一方の接続を省略できる。また同じ種類の 2 素子の間の直列接続、並列接続は 1 素子とみなしうる。以上の考慮のもとに $W_{2/2}$ を構成しうるすべての $N_{3R,2X}$ を求めて表-2~表-4 を得た。表-2 は X の 2 素子が C のみで構成しうる場合、表-3 は X の 2 素子を L, C 各 1 個ずつで構成されており、 $r < 1$ の条件が求められた場合、表-4 は X が異なる種類の 2 素子からなり、 $r > 1, r < 1$ のいずれの条件でも構成しうる場合を示す。この表の「素子値と $W_{2/2}$ の係数の関係」の欄は Z に関するものであり、 Y に関しては双対性を考慮してすぐ求められる。また表には各素子値が正の実数として求められなければならないことから生じる条件も記入してある。

この表の求め方の一例として、N-19 の回路の場合を示す。 $W_{2/2}$ を次の形に書く。

$$W_{2/2} = \frac{rb_2s^2 + a_1s + 1}{b_2s^2 + b_1s + 1} \quad (b_2, b_1, a_1, r > 0) \tag{1}$$

N-19 の回路のインピーダンス Z を求める。

$$Z = \frac{R_2(R_1 + R_3)LCs^2 + \{(R_1 + R_3)L + R_1R_2R_3C\}s + R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{(R_1 + R_2 + R_3)LCs^2 + \{L + R_1(R_2 + R_3)C\}s + R_2 + R_3} \tag{2}$$

(1) 式と (2) 式を等置して次の関係をうる。

表-2 $W_{2/2}$ を構成可能な $N_{3R,2X}$ その1 ($r < 1$ で, 同種の X 2ヶ用いたとき)

	条件	イミタンス回路図		素子値と $W_{2/2}$ の係数の関係	備考
		インピーダンス	アドミタンス		
$N-1$	$F_1 < 0$			$R_1 = r, R_2 = \frac{-(a_1 - rb_1)^2}{F_2}, R_3 = \frac{-F_1}{F_2}$	$F_1 = (1-r)^2 b_2 + (a_1 + b_1)(a_1 - rb_1)$
$N-1'$	$a < b_1 < \frac{a_1}{r}$	$N-1$	$N-1'$	$C_1 = \frac{b_2}{a_1 - rb_1}, C_2 = \frac{-F_2^2}{(a_1 - rb_1)F_1}$	$F_2 = (1-r)b_2 - (a_1 - rb_1)b_1$
$N-2$	同上			$R_1 = 1, R_2 = \frac{-F_3}{(b_1 - a_1)^2}, R_3 = \frac{rF_3}{F_1}$	$F_3 = (1-r)b_2 + a_1(a_1 - b_1)$
$N-2'$		$N-2$	$N-2'$	$C_1 = b_1 - a_1, C_2 = \frac{-b_2(b_1 - a_1)F_1}{F_3^2}$	
$N-3$	同上			$R_1 = 1, R_2 = \frac{r}{1-r}, R_3 = \frac{-F_1}{(1-r)(a_1 - b_1)^2}$	
$N-3'$		$N-3$	$N-3'$	$C_1 = b_1 - a_1, C_2 = \frac{b_2(1-r)^2(b_1 - a_1)}{-F_1}$	
$N-4$	同上			$R_1 = r, R_2 = 1-r, R_3 = \frac{(1-r)(a_1 - rb_1)^2}{-F_1}$	
$N-4'$		$N-4$	$N-4'$	$C_1 = \frac{b_2}{a_1 - rb_1}, C_2 = \frac{-F_1}{(1-r)^2(a_1 - rb_1)}$	
$N-5$	同上			$R_1 = r, R_2 = 1-r, R_3 = \frac{-(1-r)F_1}{(a_1 - b_1)^2}$	
$N-5'$		$N-5$	$N-5'$	$C_1 = \frac{b_1 - a_1}{(1-r)^2}, C_2 = \frac{-b_2(b_1 - a_1)}{F_1}$	
$N-6$	同上			$R_1 = 1, R_2 = \frac{r}{1-r}, R_3 = \frac{(a_1 - rb_1)^2}{-(1-r)F_1}$	
$N-6'$		$N-6$	$N-6'$	$C_1 = \frac{(1-r)^2 b_2}{a_1 - rb_1}, C_2 = \frac{-F_1}{a_1 - rb_1}$	
$N-7$	同上			$R_1 = r, R_2 : (4b_2 - b_1^2)x^2 - (4b_2 - b_1^2)(1-r)x + F_1 = 0$ の正の実根, $R_3 = 1 - r - R_2$	
$N-7'$		$N-7$	$N-7'$	$C_1 = \frac{(a_1 - rb_1) - b_1 R_2}{(1-r-2R_2)R_2}, C_2 = \frac{b_1(1-R_2) - a_1}{R_3(1-r-2R_2)}$	
$N-8$	同上			$R_1 = 1, R_2 : F_1 x^2 + (1-r)(a_1^2 - 4rb_1)x + r(4rb_2 - a_1^2) = 0$ の正の実根, $R_3 = \frac{rR_2}{(1-r)R_2 - r}$	
$N-8'$		$N-8$	$N-8'$	$C_1 = \frac{a_1 R_2 - r(a_1 + b_1 R_2)}{R_2(R_2 + R_2 - 2r)}, C_2 = \frac{-[a_1(1+r) - b_1 R_2](R_2 - rR_2 - r)}{R_2(R_2 + R_2 - 2r)}$	
$N-9$	同上			$R_1 = \frac{(1-R_3)r}{1-r-R_3}, R_2 = 1-R_3, R_3 : (4b_2 - b_1^2)x^2 - (1-r)(4b_2 - b_1^2)x + F_1 = 0$ の正の実根	
$N-9'$		$N-9$	$N-9'$	$C_1 = \frac{(a_1 - b_1)(1-R_3)(1-r-R_3)}{(1-R_3)^2(2R_3 - 1 + r)}, C_2 = \frac{(a_1 - rb_1) - b_1 R_3}{R_3(1-r-2R_3)}$	
$N-10$	同上			$R_1 = \frac{R_2 r}{R_2 - r}, R_2 : F_3 x^2 + (1+r)(a_1^2 - 4rb_1)x + r(4rb_2 - a_1^2) = 0$ の正の実根, $R_3 = 1 - R_2$	$F_5 = (1+r)^2 b_2 - b_1 \{ (1+r)a_1 - rb_1 \}$
$N-10'$		$N-10$	$N-10'$	$C_1 = \frac{(R_2 - r)(a_1 - b_1 R_2)}{R_2(2r - R_2 + R_2)}, C_2 = \frac{a_1(R_2 r - R_2 - r) - b_1 R_2}{R_2(1-R_2)(R_2 - 2r + rR_2)}$	
$N-11$	$F_1 < 0$ $F_0 < 0$ の共通範囲			$R_1 : (R_2 - r)x^2 + (1-R_2)(r-R_2)x + rR_2(1-R_2) = 0$ の正の実根 $R_2 : -F_2 y^2 + F_0 y - rF_3 = 0$ の正の実根, $R_3 = 1 - (R_1 + R_2)$	$F_8 = (1-r)(1-3r)b_2 + (a_1 - b_1)(a_1 - rb_1)$ $\alpha_1, \alpha_2 = \frac{1-3r \pm \sqrt{D}}{2}, D = (1-r)(1-\frac{a_1}{r})$ $F_0 = (1-r)(1-9r)b_2 + 4r \cdot a_1 b_1 + (a_1 - b_1)(a_1 - rb_1)$
$N-11'$	$\alpha_1 < b_1 < \alpha_2$	$N-11$	$N-11'$	$C_1 = \frac{a_1 - b_1 R_1}{(R_3 - R_1)(1-R_3)}, C_2 = \frac{a_1 - R_3 b_1}{(R_1 - R_3)(1-R_1)}$	
$N-12$	$F_4 < 0$			$R_1 : F_5 x^2 - F_0 x - (a_1 - rb_1)^2 = 0$ の正の実根 $R_2 = \frac{(1-r)r}{1-r-R_1}, R_3 = 1 - R_1$	$F_4 = (1+r)^2 b_2 + (a_1 - b_1) \cdot (a_1 - rb_1)$ $F_5 = (1+r)^2(1-r)b_2 - (a_1 - rb_1)(1+r)a_1 + (1-r)b_1$
$N-12'$	$a < b_1 < \frac{a_1}{r}$	$N-12$	$N-12'$	$C_1 = \frac{b_1(r+R_1) - a_1}{R_1(1+r)}, C_2 = \frac{b_2(1+r)(1-r-R_1)}{(1-r)^2(b_1 + rR_1 - a_1)}$	

注意 $N-11, N-11'$ のみは $r < 0.1$ の範囲でのみ可能である。

表-3 $W_{2/2}$ を構成可能な $N_{3R,2X}$ その2 ($r < 1$ で、 X が異なる種類るとき)

	条件	イミタンス回路図		素子値と $W_{2/2}$ の係数の関係	備考
		インピーダンス	アドミタンス		
N-13 N-13'	$F_1 > 0$ $F_2 < 0$ の共通範囲			$R_1 = r, R_2 = 1-r, R_3 = -\frac{F_1}{F_2}$ $C_1 = \frac{b_2}{a_1-rb_1}, L_1 = \frac{F_1}{a_1-rb_1}$	
N-14 N-14'	同上			$R_1 = \frac{F_{11}}{F_2}, R_2 = \frac{-rF_{11}}{(a_1-rb_1)^2}, R_3 = \frac{(1-r)F_{11}^2}{(a_1-rb_1)^2F_1}$ $C_1 = \frac{b_2(a_1-rb_1)^3}{F_{11}^2}, L_1 = \frac{F_{11}^2}{(a_1-rb_1)F_1}$	$F_{11} = r(1-r)b_2 - a_1(a_1-rb_1)$
N-15 N-15'	同上			$R_1 = r, R_2 = \frac{(a_1-rb_1)^2}{-F_2}, R_3 = \frac{(1-r)(a_1-rb_1)^2}{F_1}$ $C_1 = \frac{b_2}{a_1-rb_1}, L_1 = \frac{(a_1-rb_1)^3}{F_1}$	
N-16 N-16'	$F_1 > 0$ $F_3 < 0$ の共通範囲 $a_1 < b_1$			$R_1 = 1, R_2 = \frac{r}{1-r}, R_3 = \frac{-rF_3}{-F_1}$ $C_1 = b_1 - a_1, L_1 = \frac{(b_1 - a_1)r^2b_2}{F_1}$	
N-17 N-17'	同上			$R_1 = \frac{F_3}{F_{12}}, R_2 = \frac{(b_1 - a_1)^2}{-F_{12}}, R_3 = \frac{(b_1 - a_1)^2F_1}{(1-r)F_{12}^2}$ $C_1 = \frac{F_{12}^2}{(b_1 - a_1)^3}, L_1 = \frac{b_2(b_1 - a_1)F_1}{F_{12}^2}$	$F_{12} = (1-r)b_2 + (a_1 - b_1)b_1$
N-18 N-18'	同上			$R_1 = 1, R_2 = \frac{-F_3}{(b_1 - a_1)^2}, R_3 = \frac{F_1}{(1-r)(b_1 - a_1)^2}$ $C_1 = b_1 - a_1, L_1 = \frac{b_2F_1}{(b_1 - a_1)^3}$	
N-19 N-19'	下の欄参照			$R_1; (r+R_3)y^2 + (R_3-1)(R_3+r)y - (1-r)R_3^2 = 0$ の正の実根 $R_2 = \frac{r(R_1+R_3)}{R_1+R_3-r}, R_3; F_2x^2 + F_8x + F_3 = 0$ の正の実根 $C_1 = \frac{(R_2+R_3)(b_1(R_1+R_3)-a_1)}{R_1(R_1R_2+R_1R_3+R_3^2)}, L_1 = \frac{(R_2+R_3)(a_1(R_2+R_3)-b_1R_2R_3)}{R_1R_2+R_1R_3+R_3^2}$	
<p>N-19の条件 ① $F_2F_3 < 0, ② -a \frac{1}{\rho} < r < 1$ ならば $F_2, F_3 > 0, F_1, F_9 \geq 0, F_8 < 0$ の共通範囲</p> <p>③ $-b < 0 < r < \frac{1}{\rho}$ ならば $F_2, F_3 < 0, F_1, F_9 \geq 0, F_8 > 0$ の共通範囲</p>					

$$\left. \begin{aligned}
 1 &= \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_2 + R_3} & (3.1) & \quad a_1 = \frac{(R_1 + R_3)L + R_1R_2R_3C}{R_2 + R_3} & (3.2) \\
 b_1 &= \frac{L + R_1(R_2 + R_3)C}{R_2 + R_3} & (3.3) & \quad b_2 = \frac{(R_1 + R_2 + R_3)LC}{R_2 + R_3} & (3.4) \\
 r &= \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} & (3.5) & &
 \end{aligned} \right\} (3)$$

(3) 式を逆に解き

$$\left. \begin{aligned}
 R_1 \text{ は } (r+R_3)y^2 + (r+R_3)(R_3-1)y - (1-r)R_3^2 = 0 \text{ の } y \text{ の正の実根} & (4.1) \\
 R_2 = \frac{r(R_1+R_3)}{R_1+R_3-r} & (4.2) \\
 R_3 \text{ は } F_2x^2 + F_8x + F_3 = 0 \text{ の } x \text{ の正の実根} & (4.3)
 \end{aligned} \right\}$$

表-4 $W_{2/2}$ を構成可能な $N_{3R,2X}$ その3 ($r > 1, r < 1$ いずれでもよく, X が異なる種類のとき)

	条件	イミタンス回路図		素子値と $W_{2/2}$ の係数の関係	備考
		インピーダンス	アドミタンス		
N-20 N-20'	$F_1 > 0$ $F_7 < 0$ の共通範囲			$R_1 = \frac{R_3 - r}{r - R_3 - 1}, R_2 = 1, R_3; (4b_2 - b_1^2)x^2 + (1-r)(4b_2 - b_1^2)$ $x + F_7 = 0$ の正の実根 $L_1 = \frac{R_3(b_1 R_2 + a_1 - r b_1)}{r - 1 + 2R_3}$ $C_1 = \frac{-b_1 R_3^2 + (b_1 r - 2b_1 + a_1) R_3 + (r-1)(b_1 - a_1)}{r - 1 - 2R_3}$	$F_7 = (1+r)^2 b_2 + a_1(a_1 - (1+r)b_1)$
N-21 N-21'	同上			$R_1 = \frac{(R_3 - 1)r}{1 - r - R_3}, R_2 = r, R_3; (4b_2 - b_1^2)x^2 - (1-r)(4b_2 - b_1^2)$ $x + F_1 = 0$ の正の実根 $L_1 = \frac{r^2(a_1 - b_1 + b_1 R_3)}{(r + R_3 - 1)(r + 2R_3 - 1)}, C_1 = \frac{-a_1 + b_1(r + R_3)}{R_3(r + 2R_3 - 1)}$	
N-22 N-22'	同上			$R_1; (4b_2 - b_1^2)x^2 - (1+r)(4b_2 - b_1^2)x + F_5 = 0$ の正の実根, $R_2 = r - R_1, R_3 = 1 - r$ $L_1 = \frac{(r - R_1)(a_1 - b_1 R_1)}{1 + r - 2R_1}, C_1 = \frac{b_1(1 + r - R_1) - a_1}{(1 - r)(1 + r - 2R_1)}$	
N-23 N-23'	下の欄 参照			$R_1; (4b_2 - b_1^2)x^2 + 2\{a_1 b_1 - 2(1+r)b_2\}x + F_5 = 0$ の正の実根, $R_2 = r - R_1, R_3 = 1 - R_1$ $L_1 = \frac{b_2(1 + r - 2R_1)}{b_1}, C_1 = \frac{b_1}{1 + r - 2R_1}$	
N-24	同上			$R_1 = 1, R_2; F_5 x^2 + F_{10} x + r F_7 = 0$ の正の実根, $R_3 = r$ $L = \frac{a_1(R_2 + R_3 + r) - b_1 r R_2}{(1 + R_2)(1 + r)}, C = \frac{(1 + r + R_2)b_1 - a_1}{(1 + r)(1 + R_2)}$	$F_{10} = (1+r)^2 b_2 - (1+r)^2 a_1 b_1 + (1+r)(a_1^2 + r b_1^2) - 2a_1 b_1 r$

N-23の条件

I. $r < 1$ ならば ① $0 < b_1 < \frac{(1+r)a_1}{2r}$ のとき $F_2 < 0, F_5 > 0$ の共通範囲 ② $\frac{1+r}{2r} a_1 < b_1 < \frac{2(1+r)}{r(3+r)} a_1$ のとき $F_2 < 0, F_1 > 0$ の共通範囲 ③ $\frac{2(1+r)}{r(3+r)} a_1 < b_1 < \frac{1+r}{r} a_1$ のとき $F_5 < 0, F_1 > 0$ の共通範囲

II. $r > 1$ ならば ① $0 < b_1 < \frac{(1+r)a_1}{2r}$ のとき $F_{12} > 0, F_5 > 0$ の共通範囲 ② $\frac{1+r}{2r} a_1 < b_1 < \frac{2(1+r)}{1+3r} a_1$ のとき $F_{12} > 0, F_1 > 0$ の共通範囲 ③ $\frac{2(1+r)}{1+3r} a_1 < b_1 < \frac{1+r}{r} a_1$ のとき $F_5 < 0, F_1 > 0$ の共通範囲

N-24の条件

① $0 < b_1 < \frac{2a_1}{1+r}$ のとき $F_5 < 0, F_7 > 0$ の共通範囲 ② $\frac{2a_1}{1+r} < b_1 < \frac{a_1}{\sqrt{r}}$ のとき $F_1 > 0, F_5 < 0$ の共通範囲
③ $\frac{a_1}{\sqrt{r}} < b_1 < \frac{1+r}{2r} a_1$ のとき $F_1 > 0, F_7 < 0$ の共通範囲 ④ $\frac{1+r}{2r} a_1 < b_1$ のとき $F_7 < 0, F_5 > 0$ の共通範囲

$$\left. \begin{aligned} \text{ただし } F_2 &= (1-r)b_2 - (a_1 - r b_1)b_1 \\ F_3 &= (1-r)b_2 + a_1(a_1 - b_1) \\ F_8 &= (1-r)(1-3r)b_2 + (a_1 - b_1)(a_1 - r b_1) \end{aligned} \right\} (4)$$

$$L = \frac{(R_2 + R_3)\{a_1(R_2 + R_3) - b_1 R_2 R_3\}}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_3^2} \quad (4.4)$$

$$C = \frac{(R_2 + R_3)\{(R_1 + R_3)b_1 - a_1\}}{R_1(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_3^2)} \quad (4.5)$$

となり, 各素子値を $W_{2/2}$ の係数で表わしうる。

以上のような方法で表-2~表-4の素子値と $W_{2/2}$ の係数の間の関係を求めた。

3. 構成可能条件とその図示

前報で示したように $W_{2/2}$ が正実関数であるための条件, Brune 又は Bott-Duffin の方法を

使わねばならないときの条件, および宮田の方法で昇次法を用いない範囲で構成しうる条件をそれぞれ (5), (6) および (7) 式に示す。

$$F_0 = b_2 - \frac{a_1 b_1}{(1 \sim \sqrt{r})^2} \leq 0 \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} F_2 &= (1-r)b_2 - (a_1 - rb_1)b_1 > 0 \\ F_3 &= (1-r)b_2 + a_1(a_1 - b_1) > 0 \end{aligned} \right\} \text{の共通範囲 } (r < 1 \text{ のとき}) \quad (6.1)$$

$$\left. \begin{aligned} F_{12} &= b_2(1-r) + b_1(a_1 - b_1) < 0 \\ F_{13} &= b_2r(1-r) - a_1(a_1 - rb_1) < 0 \end{aligned} \right\} \text{の共通範囲 } (r > 1 \text{ のとき}) \quad (6.2)$$

$$F_M = (1+r)b_2 - a_1 b_1 < 0 \quad (7)$$

また 2. において述べた関係 (表-2~表-4 の「素子値と $W_{2/2}$ の係数の関係」の欄) を使えば与えられた $W_{2/2}$ に対する $N_{3R,2X}$ が求められるが, これを構成する素子値は正の実数でなければならない。このために $W_{2/2}$ の係数の値に制限を受ける。例えば 2. に示した $N-19$ の回路についてこれを求める。

I. R_1 が正の実数で求められる条件

(4.1) 式を解く。

$$y = \frac{(r+R_3)(1-R_3) \pm \sqrt{D_1}}{2(r+R_3)} \quad (8)$$

$$\text{ここで } D_1 = (r+R_3)(R_3+1)\{R_3^2+R_3(1-3r)+r\}$$

I-a. y が実根を持つための条件

$$R_3^2+R_3(1-3r)+r \geq 0 \quad (9)$$

(9) 式はその判別式から

(i) $\frac{1}{9} \leq r \leq 1$ ならば R_3 の如何にかかわらず成立する。

(ii) $r > 1$ または $r < 1/9$ ならば

$$R_3 \geq \frac{3r-1+\sqrt{D_2}}{2} \quad \text{または} \quad R_3 \leq \frac{3r-1-\sqrt{D_2}}{2} \quad \text{のとき成立する。}$$

I-b. y が正の実根をもつための条件はつぎの通りである。

$$(r+R_3)(1-R_3) + \sqrt{D_1} > 0 \quad (10)$$

この式は

(i) $R_3 < 1$ ならば r の如何にかかわらず成立する。

(ii) $R_3 \geq 1$ ならば $1 > r$ が必要である。

以上 I-a, I-b が同時に満足されねばならない。

II. R_2 が正の実数で求められる条件

(4.2) 式より次の条件を満たさねばならぬ。

$$R_1 + R_3 - r > 0 \tag{11}$$

この式の R_1 に (4.1) 式を代入してつぎの条件をうる。

$$(r + R_3)(1 - 2r + R_3) \pm \sqrt{D_1} > 0 \tag{12}$$

これは I. より常に実根をもつ。正の実根をもつための条件は

$$\text{II-a. } R_3 > 2r - 1 \tag{13}$$

ならば常に成立する。

II-b. $R_3 \leq 2r - 1$ ならば $D_1 > (r + R_3)(1 - 2r + R_3)^2$ が必要である。これから

$$4r^2(1 - r) > 0 \tag{14}$$

をうる。

以上の I, II を総合すると

$$r < 1 \tag{15}$$

が条件となる。

III. R_3 が正の実数で求められる条件

(4.3) 式よりつぎの (i), (ii) が同時に満足されねばならない。

$$(i) F_2 F_3 < 0 \tag{16}$$

(ii) a) $F_2, F_3 > 0$ ならば

$$F_8^2 - 4r F_2 F_3 \geq 0 \quad \text{かつ} \quad F_8 < 0 \tag{17}$$

b) $F_2, F_3 < 0$ ならば

$$F_8^2 - 4r F_2 F_3 \geq 0 \quad \text{かつ} \quad F_8 > 0 \tag{18}$$

ただし $F_1 = (1 - r)^2 b_2 + (a_1 - b_1)(a_1 - r b_1)$

$$F_9 = (1 - r)(1 - 9r) b_2 + 4r a_1 b_1 + (a_1 - b_1)(a_1 - r b_1)$$

IV. L, C について。

(3.2)~(3.4) 式をつぎのように書き直す。

$$a_1 = \alpha_1 L + \beta_1 C, \quad b_1 = \alpha_2 L + \beta_2 C, \quad b_2 = \alpha_3 LC \tag{19}$$

a_1, b_1, b_2 は正の実数であり, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ も R_1, R_2, R_3 からなる正の実数であるから, L, C は必ず正の実数で求められることは容易に証明される。

以上の考察より N-19 の回路が実現される条件が次のように求められる。

$r < 1$ であり

かつ ① $F_2 F_3 < 0$

または ② $F_2 > 0, F_3 > 0, F_1 F_9 \geq 0, F_8 < 0$ の共通範囲

または ③ $F_2 < 0, F_3 < 0, F_1 F_9 \geq 0, F_8 > 0$ の共通範囲

他の回路についても同様な方法で条件が求められ, これを表-2~表-4の中に示す。

また表-2~表-4のうち、表-4の回路は $r > 1$, $r < 1$ のいずれでも構成できるから、'をつけたアドミタンス Y を $r' > 1$ の条件で構成すると、インピーダンス Z としては $r > 1$ となる。(したがって $r < 1$ の条件を満足する Z は、 $N_{3R,2X}$ のうち 40 通りあることになる。) 例えば $N-20' \sim 22'$ の回路で

$$Y = \frac{b_2' r s^2 + a_1' s + 1}{b_2' s^2 + b_1' s + 1} \quad (r' > 1) \tag{20}$$

とすれば、構成可能条件は表-4から

$$\left. \begin{aligned} F_1' &= (1-r')^2 + (a_1' - b_1')(a_1' - r'b_1') > 0 \\ F_7' &= (1+r')^2 b_2' + a_1' \{a_1' - (1+r') b_1'\} < 0 \end{aligned} \right\} \text{の共通範囲} \tag{21}$$

である。これを Z として考えればつぎのようになる。

$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{b_2' s^2 + b_1' s + 1}{b_2' r' s^2 + a_1' s + 1} \equiv \frac{b_2 r s^2 + a_1 s + 1}{b_2 s^2 + b_1 s + 1} \tag{22}$$

ここで $r = \frac{1}{r'} < 1$, $b_2 = b_2 r'$, $a_1 = b_1'$, $b_1 = a_1'$

ゆえに条件 (21) 式はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} F_1' &= \frac{1}{r} \left\{ (1-r)^2 b_2 + (a_1 - b_1)(a_1 - r b_1) \right\} = \frac{F_1}{r} > 0 \\ F_7' &= \frac{1}{r} \left[(1+r)^2 b_2 - b_1 \left\{ (1+r) a_1 - r b_1 \right\} \right] = \frac{F_5}{r} < 0 \end{aligned} \right\} \tag{23}$$

ただし $b_1 < \frac{1+r}{r} a_1$

すなわち $F_1' > 0$ は $F_1 > 0$ に、 $F_7' < 0$ は $F_5 < 0$ に相当する。ゆえに $F_1 > 0$, かつ $F_5 < 0$ の $W_{2/2}$ は $N-20' \sim 22'$ の回路で構成しうることを示す。同様に $N-23'$ の回路を $r < 1$ のとき Z で構成

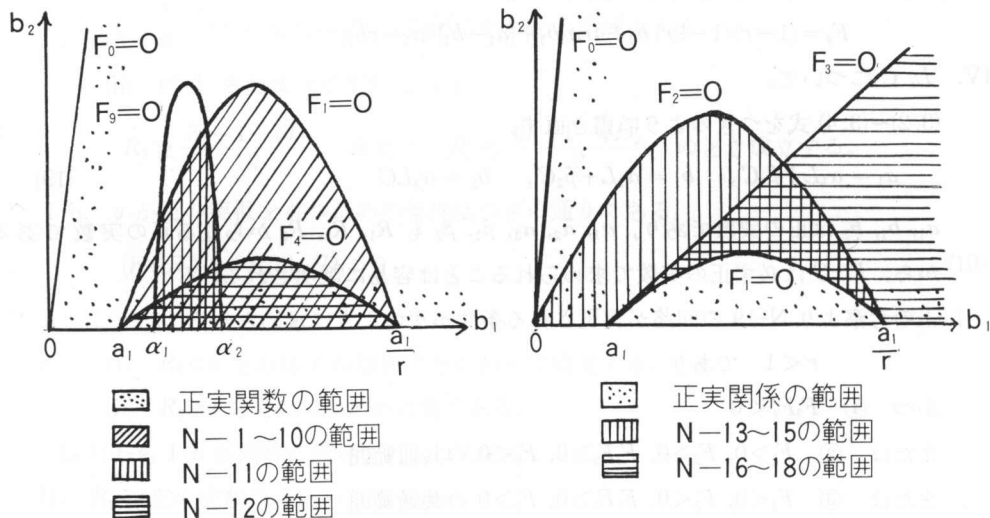
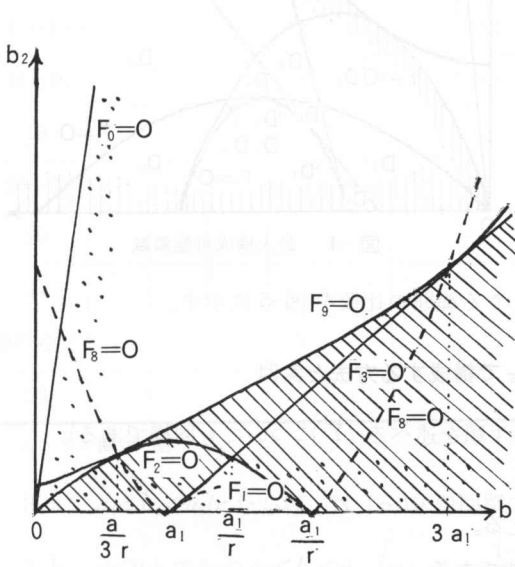


図-1 表-2の範囲

図-2a. 表-3の範囲 (その1)

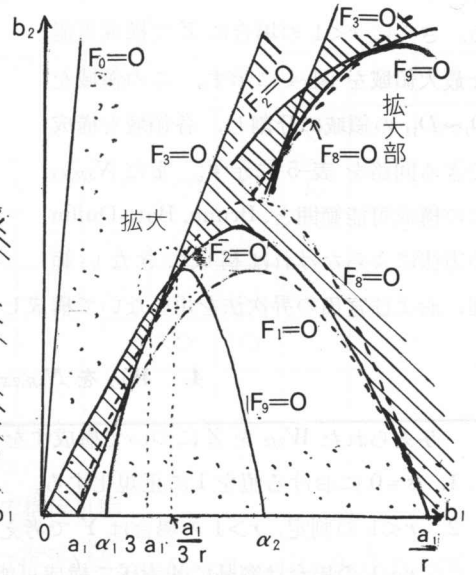
しうる条件はつぎの通りである。

$$\left. \begin{aligned} &F_3 < 0, F_7 > 0 \text{ の共通範囲 } \left(b_1 > \frac{2a_1}{1+r} \right) \\ &F_3 < 0, F_1 > 0 \text{ の共通範囲 } \left(\frac{2a_1}{1+r} > b_1 > \frac{3+r}{2(1+r)} a_1 \right) \\ &F_7 < 0, F_1 > 0 \text{ の共通範囲 } \left(\frac{3+r}{2(1+r)} a_1 > b_1 > \frac{a_1}{1+r} \right) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$



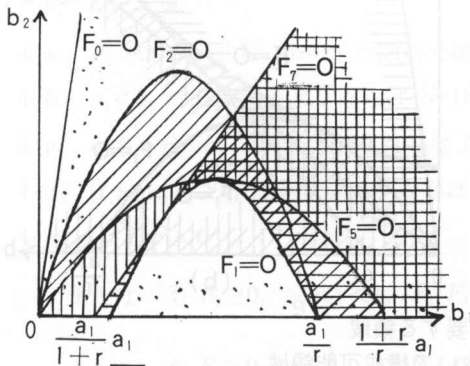
- ⊙ 正実関数の範囲
- ▨ N-19の範囲 ($\frac{1}{9} < r < 1$ のときで $r = 0.5$ を例示)

図-2b. 表-3の範囲 (その2)



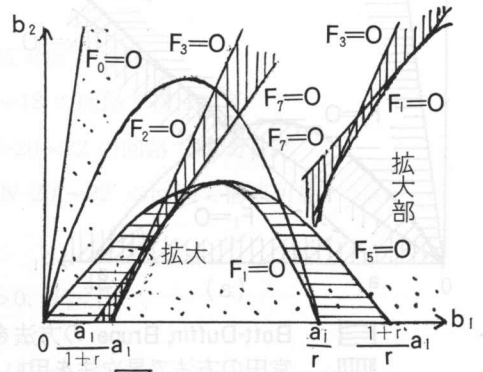
- ⊙ 正実関数の範囲
- ▨ N-19の範囲 ($r < \frac{1}{9}$ のときで $r = \frac{1}{11}$ を例示)

図-2c. 表-3の範囲 (その3)



- ⊙ 正実関数の範囲
- ▨ N-20~22の範囲
- ▨ N-23の範囲
- ▨ N-24の範囲

図-3a. 表-4の範囲 (その1)



- ⊙ 正実関数の範囲
- ▨ N-20'~22'の範囲 ($r < 1$)
- ▨ N-23'の範囲 ($r < 1$)

図-3b. 表-4の範囲 (その2)

これらの条件を前報と同様な方法で図示したものが 図-1~図-3 である。これらの図からわかるように N-19 の回路で $1 > r > \frac{1}{9}$ のときには、Bott-Duffin の方法によらなければ構成し得ない条件でも、これを用いて構成できる場合がある。さらに $r < 1$ の場合に Z で構成可能な最大領域を 図-4 に示す。この領域を $D_1 \sim D_{14}$ の領域に分割し、各領域を構成できる回路を表-5 に示す。また $N_{3R,2X}$ での構成可能範囲と、Brune, Bott-Duffin の方法によらなければ構成できない範囲、および宮田の昇次法を用いないで構成しうる範囲の比較を 図-5 に示す。

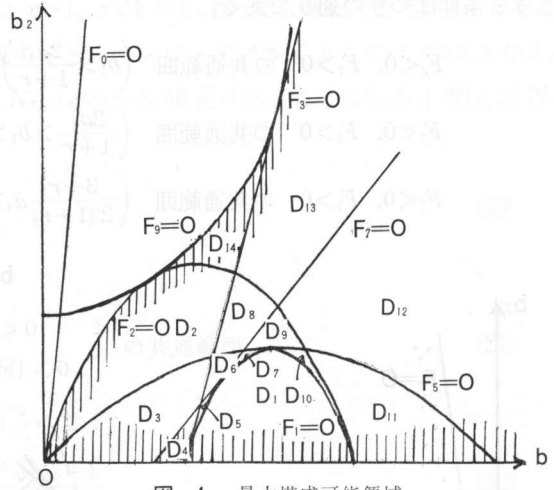
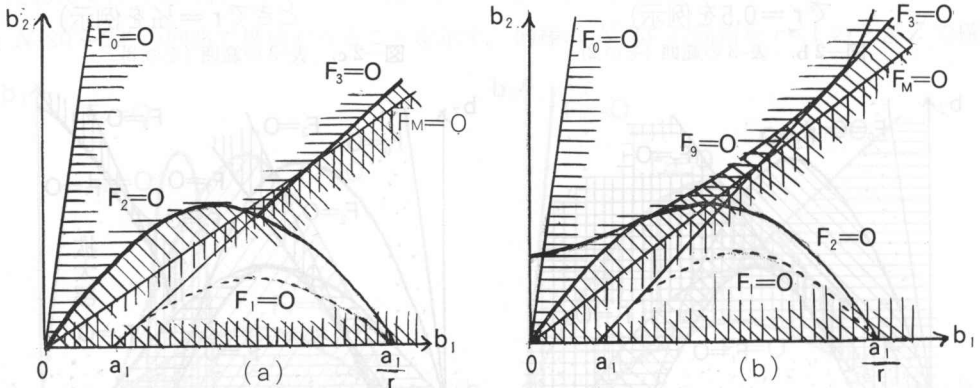


図-4 最大構成可能領域

4. $W_{2/2}$ を $N_{3R,2X}$ で構成する方法と実例

与えられた $W_{2/2}$ を Z について構成す手順を述べる (Y についても同様である)。

1. $s=0$ における値を 1 に正規化する。
2. $r < 1$ の判定, $r > 1$ の場合は Y で考える。
 $r=1$ の場合は容易に 4 素子で構成可能である。
3. $F_1 < 0$ のとき



- Bott-Duffin, Brune の方法を要する領域
- 宮田の方法で昇次法を用いないで構成可能領域
- 本文の場合の構成可能領域

図-5 本文における構成可能領域と、Bott-Duffin および宮田の方法による構成可能領域の比較

(a)は $r < \frac{1}{9}$ の場合. (b)は $\frac{1}{9} < r < 1$ の場合

表-5 構成可能領域と回路の関係 ($r < 1$ のインピーダンスについて)

N	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	D ₅	D ₆	D ₇	D ₈	D ₉	D ₁₀	D ₁₁	D ₁₂	D ₁₃	D ₁₄
1~10	○													
11	△													
12	△													
13~15		○	○	○	○	○	○	○	○	○				
16~18				○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	
19		○	○	○							○	○	○	○
20~22				○	○		○		○	○	○	○		
23		○						○	○	○	○			
24			○		○		○		○			○		
20'~22'			○	○	○	○	○			○	○			
23'				○	○	○		○					○	

△: 一部可能

3-a. $a_1 < b_1 < a_1/r$ ならば, N-1~10 の回路で構成可能

3-b. $r < 0.1$ でかつ $\alpha_1 < b_1 < \alpha_2$, $\left(\alpha_1, \alpha_2 = \frac{1-3r \mp \sqrt{D_1}}{2r} a_1 \quad D_1 = (1-r)(1-9r) \right)$ ならば
N-11 の回路でも構成可能

3-c. $a_1 < b_1 < \frac{a_1}{r}$ でかつ $F_4 < 0$ ならば N-12 の回路でも構成可能

4. $F_1 > 0$ のとき

4-a. $F_2 < 0$ ならば N-13~15 の回路で構成可能

4-b. $a_1 < b_1$ で, かつ $F_3 < 0$ ならば N-16~18 の回路で構成可能

4-c. $a_1/(1+r) < b_1$ でかつ $F_7 < 0$ ならば N-20~22 の回路で構成可能

4-d. $(1+r)a_1/r > b_1$ でかつ $F_5 < 0$ ならば N-20'~22' の回路で構成可能

4-e. ① $F_2 F_3 < 0$

または ② $F_9 \geq 0, \frac{1}{9} < r < 1, F_2, F_3 > 0, F_8 < 0$

または ③ $F_9 \geq 0, r < \frac{1}{9}, F_2, F_3 < 0, F_8 > 0$

ならば N-19 の回路で構成可能

4-f. i) $b_1 < (1+r)a_1/2r$ で, $F_2 < 0, F_5 > 0$ のとき

または ii) $(1+r)a_1/2r < b_1 < 2(1+r)a_1/(1+3r)$ で, $F_{12} > 0, F_1 > 0$ のとき

または iii) $2(1+r)a_1/(1+3r) < b_1 < (1+r)a_1/r$ で, $F_5 < 0, F_1 > 0$ のとき

N-23 の回路で構成可能

4-g. i) $b_1 > 2a_1/(1+r)$ で, $F_3 < 0, F_7 > 0$ のとき

または ii) $(3+r)a_1/2(1+r) > b_1 > 2a_1/(1+r)$ で, $F_3 < 0, F_1 > 0$ のとき

または iii) $(3+r)a_1/2(1+r) > b_1 > a_1/(1+r)$ で, $F_7 < 0, F_1 > 0$ のとき

N-23' の回路で構成可能

4-h. i) $b_1 < 2a_1/(1+r)$ で, $F_5 < 0, F_7 > 0$ のとき

または ii) $2a_1/(1+r) < b_1 < a_1/\sqrt{r}$ で, $F_1 > 0, F_5 < 0$ のとき

または iii) $a_1/\sqrt{r} < b_1 < (1+r)a_1/2r$ で, $F_1 > 0, F_7 < 0$ のとき

または iv) $(1+r)a_1/2r < b_1$ で, $F_7 < 0, F_5 > 0$ のとき

N-24 の回路で構成可能

例 1. $Z = \frac{0.245s^2 + s + 1}{0.49s^2 + 1.6s + 1}$

これは $F_1 > 0, F_2 < 0, F_3 < 0, F_5 < 0, F_7 < 0, a_1 < b_1, a_1/(1+r) < b_1, (1+r)a_1/r > b_1, (1+r)a_1/2r < b_1 < 2(1+r)a_1/r(3+r)$ で, 表-6 の各種の回路で構成できる。

表-6 例 1 を満足する素子値

N	R ₁	R ₂	R ₃	L	C	
13	0.5000	0.5000	0.0333	0.0125	2.4500	
14	1.0330	0.9688	30.031	12.0130	0.6527	
15	0.5000	0.5333	8.0000	3.2000	2.4500	
16	1.0000	1.0000	71.0000	29.4000	0.6000	
17	0.4965	0.5035	0.00352	0.00144	2.3668	
18	1.0000	0.9861	0.01389	0.00567	0.6000	
20	0.9677	1.0000	0.0082	0.00338	0.6034	
21	29.988	0.5000	0.5082	12.582	2.3363	
22	0.4918	0.0082	0.5082	0.00338	2.3363	
23	a	0.3500	0.1500	0.6500	0.2450	2.0000
	b	0.0833	0.4167	0.9167	0.4083	1.2000
20'	0.2612	1.0000	0.8284	0.0889	0.6889	
21'	0.7612	0.5000	4.8286	2.0729	1.8912	
22'	1.2610	0.8285	4.8310	2.0738	0.6889	

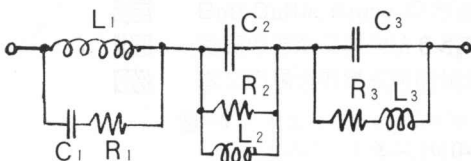


図-6 例 1 を宮田の方法で求めた回路図

表-7 図-6 の素子値

R ₁	0.5000	L ₁	0.1531	C ₁	3.2000
R ₂	0.3379	L ₂	0.5406	C ₂	0.9064
R ₃	1.0000	L ₃	0.30625	C ₃	1.6000

これを宮田の方法で構成するならば図-6のようになる。その素子値は表-7の通りである。

例2. $Z = \frac{5s^2 + 3s + 1}{10s^2 + 4s + 1}$

これは $F_1 > 0, F_2 > 0, F_3 > 0, F_8 < 0, F_9 > 0, a_1/3r < b_1 < 3a_1$ であるから、N-19の回路のみで構成可能である。この値を表-8に示す。

これを Bott-Duffin の方法で求めると図-7、表-9のようになる。しかしこれは更に1素子減らしうる。例えば Storer の方法により図-8、表-10のようになる。

なお宮田の方法で求めると昇次法を使わなければならず、素子数は非常に多くなる。

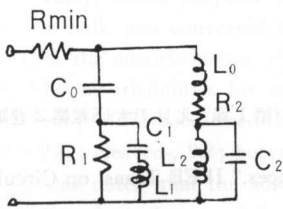


図-7 例2を Bott-Duffin 法で求めた回路

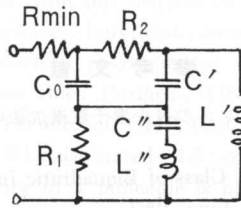


図-8 図-7の回路を Storer の方法で1素子減少させた回路

表-8 例-2を満足する素子値 (2組ある)

	R_1	R_2	R_3	L	C
a	0.51061	0.57821	3.1860	1.2235	7.1970
b	0.76509	0.93182	0.31386	3.0411	2.0373

表-9 図-7の素子値

R_{min}	0.49484	L_0	0.02896	C_0	8.8073
R_1	0.005155	L_1	0.0021445	C_1	471.49
R_2	0.50427	L_2	1.2257	C_2	0.82491

表-10 図-8の素子値 (R_{min}, R_1, R_2, C_0 の値は表-9のそれと同じ)

C'	0.80979	C'''	515.66	L'''	1.2466
C''	43.350	L'	1.2486	L''''	0.001961
C'''	49.123	L''	0.02547		

5. 結 言

本研究で得た成果は次の通りである。

1. 抵抗3素子、リアクタンス2素子で構成しうる双2次イミタンスの範囲が明らかになった。構成できない範囲を今後どうするかという問題が残された。

2. 構成可能な双2次イミタンスが与えられると、その双2次イミタンスは抵抗3素子リアクタンス2素子のどの回路で構成できるかが明瞭になった。多くの場合構成可能な回路の数は数個ある(一番多い場合は14個である)。今後等価回路変換の問題を生じた。

3. 特に同一の双2次イミタンスを全く数値の異なる二組の素子からなる、同一構造の回路一この場合5素子からなる極めて簡単な回路である一で構成しうることがわかった。

4. Brune 形双2次イミタンスの一部 (Bott-Duffin の方法では8素子を必要とする) が, Lattice 形の抵抗3素子, リアクタンス2素子回路で構成可能であることがわかった (この項に関しては一部 R. M. Foster らが指摘している²⁾).

5. 双2次イミタンスのうち宮田回路で構成可能なものは9素子 (特別な場合は6素子) 必要であるが, これらの大部分は抵抗3素子, リアクタンス2素子回路で構成可能である。

以上の研究は昭和42年度の文部省国内研究員として東京工業大学に滞在中に行ない, 本学に帰学してから検討を加えたものである。この一部は昭和43年度電気四連合大会北海道支部大会で発表した。東京工業大学の電子工学科, 電子物理工学科の諸先生方ならびに諸兄に厚く御礼申し上げます。

参 考 文 献

- 1) 品田雄治・川上正光: 双2次イミタンスの最少素子数構成法の研究 (第1報) 北見工大研報第2巻第3号 pp. 465~474 昭和44年2月.
- 2) R. M. Foster, E. L. Ladenheim, "A Class of Biquadratic Impedances," IEEE Trans. on Circuit Theory, vol. CT-10, pp. 262-264; June, 1963.