線形半順序空間の商空間に関する一注意

礒　部　熙　郎

(昭和43年9月30日受理)

A Note on Quotient Spaces of Semi-ordered Linear Spaces

by Kiro ISOBE

Let S be a linear lattice. A subset N is called ideal whenever N is a linear subspace of S and $|x|\leq|y|$, $y\in N$ implies $x\in N$. L. Brown and H. Nakano obtained the following results in [2]:

S/N is Archimedean if and only if N has the following property: $0\leq u$, $v\in S$ *and* $\left(v-\dfrac{1}{n}u\right)^{+}\in N$ $(n=1,2,\cdots)$ *implies* $v\in N$.

In this note we do not assume lattice order in S. Let S be a semi-ordered linear space (not assume lattice order) and N is called ideal whenever N is linear subspace of S and $a\leq x\leq b$, $a, b\in N$ implies $x\in N$. We shall investigate a condition about N that S/N is Archimadean.

ま　え　が　き

Sを**線形束空間**，NをSにおける**イデアル**，すなわち$\boldsymbol{N}$**は**$\boldsymbol{S}$**の線形部分空間で**

$$|\boldsymbol{x}|\leq|\boldsymbol{y}|,\quad \boldsymbol{y}\in \boldsymbol{N}\quad ならば\quad \boldsymbol{x}\in \boldsymbol{N}$$

を満足するものとする。一般にNをSの線形部分空間とするとき，S/Nが線形束空間になる必要十分条件はNがイデアルであることである[1]。また L. Brown と H. Nakano により S/Nがアルキメデアン[2] になる必要十分条件は

$$0\leq u,\quad v\in S\quad かつ\quad (v-(1/n)\,u)^{+}\in N\qquad (n=1,2,\cdots)$$
$$ならば\quad v\in N$$

であることである[3]。

という結果が得られている。

この小論ではSを束であることを仮定しない，単なる線形半順序空間，**SにおけるイデアルNをSの線形部分空間で**

1) [1] p. 222–238.

2) $0\leq u$ ならば $\inf_n(1/n)\,u=0$.

3) [2] p. 835–836.

$$\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{S} \quad \text{ならば} \quad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}$$

を満足するものとして，S/N がアルキメデアンになる条件を考えることにする。

1. 商空間 S/N について

S/N が線形半順序空間になることは簡単に知られる。その線形性については明らかである。順序はつぎのように定義する。

$S/N \ni X, Y$ に対し，適当な $x \in X$, $y \in Y$ が存在して，$x \leq y$ であるとき $X \leq Y$ と定義する。

1) $X \leq X$ は明らかである。

2) **$X \leq Y$, $X \geq Y$ ならば $X = Y$**

何故ならば，$x \in X$, $y \in Y$ が存在して $x \leq y$, 一方また，$x' \in X$, $y' \in Y$ が存在して $x' \geq y'$, したがって，

$$N \ni x - x' \leq y - x' \leq y - y' \in N$$

故に，N の定義より $y - x' \in N$, $X = Y$ である。

3) **$X \leq Y$, $Y \leq Z$ ならば $X \leq Z$**

何故ならば，$x \in X$, $y \in Y$ が存在して，$x \leq y$, $y' \in Y$, $z \in Z$ が存在して，$y' \leq z$, したがって，

$$x + (y' - y) \leq y + (y' - y) \leq z$$

$x + (y' - y) \in X$ だから $X \leq Z$ である。

また，つぎの 4), 5), 6) も明らかである。

4) **$X \geq Y$ ならば $X + Z \geq Y + Z$**

5) **$X \geq Y$, $\alpha \geq 0$ ならば $\alpha X \geq \alpha Y$**

6) **任意の $X \in S/N$ に対し，$X = Y - Z$ になる $0 \leq Y$, $Z \in S/N$ が存在する。**[4)]

2. いくつかの例

S がアルキメデアンであることと S/N がアルキメデアンであることとは，一般に無関係であることを実例で示すことにする。

例 1) **S がアルキメデアンであっても S/N がアルキメデアンにならない例。**

S を有界な実数の無限列 $\{x_n\}$ の全体がつくる線形空間とし，$x = \{x_n\}$, $y = \{y_n\}$ に対し，$x_n \leq y_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ のとき $n \leq y$ と定義する。N を適当な k が存在し，$k \leq l$ ならば $x_l = 0$ であるような S の要素 $x = \{x_n\}$ の全体とすれば N はイデアルである。今，要素 $x = \{1, 1, \cdots\}$ の同値類である S/N の要素を X とする。

$$x_k = \{x_n^{(k)}\} \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

$$x_n^{(k)} = \begin{cases} k & (1 \leq n \leq k) \\ 1 & (n > k) \end{cases}$$

---

4) $0 = N$.

とおけば $x_k \in X$ $(k=1,2,\cdots)$

$$\frac{1}{k}X \ni \frac{1}{k}x_k = \{y_n^{(k)}\}$$

とおけば

$$y_n^{(k)} = \begin{cases} 1 & (1 \leq n \leq k) \\ \dfrac{1}{k} & (n > k) \end{cases}$$

今，$y=\{y_n\}$, $y_n=\dfrac{1}{n}$ である S の要素 y の同値類である S/N の要素 Y をとれば，明らかに $y_n^{(k)} \geq y_n$ $(n=1,2,\cdots)$ だから

$$\frac{1}{k}X \geq Y \qquad (k=1,2,\cdots)$$

である。しかるに $y \geq 0$ だから $Y \geq 0$, また $y \notin N$ だから $Y \neq 0$, したがって S/N はアルキメデアンではない。

例 2) **S/N がアルキメデアンであっても，S がアルキメデアンにならない例。**

S を二次元の実ベクトル空間とし，つぎのように順序を定義する。$x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$ に対し，$x_1<y_1$ であるか，または $x_1=y_1$ かつ $x_2 \leq y_2$ であるとき $x \leq y$ とする。また，N を $x=(0,x_2)$ である要素の全体とすれば N はイデアルになる。$S/N \ni U>0$, $U \ni (x_1,x_2)$ なる U をとれば $x_1>0$ であり

$$\frac{1}{n}U \geq V \ni (y_1,y_2) \qquad (n=1,2,\cdots)$$

とすれば $y_1 \leq 0$ であるから $V \leq 0$, したがって S/N はアルキメデアンである。けれども

$$S \ni (1,0), \quad \frac{1}{n}(1,0) > (0,1) > 0 \qquad (n=1,2,\cdots)$$

より S はアルキメデアンではない。

3. 得られた結果

定理 1. S を線形半順序空間，N を S におけるイデアルとするとき，S/N がアルキメデアンになる必要十分条件は N の任意の点列 $N \ni x_n$ $(n=1,2,\cdots)$ と $0 \leq x \in S$ に対し

$$\frac{1}{n}x + x_n \geq y \qquad \text{ならば} \qquad y+u \leq 0$$

である $u \in N$ が存在することである。

(証　明)

(必 要 性) S/N がアルキメデアンであるとする。$0<x \in S$ と $N \ni x_n$ $(n=1,2,\cdots)$ に対し

$$\frac{1}{n}x + x_n \geq y$$

ならば，$x\in X\in S/N$, $y\in Y\in S/N$ とおくとき

$$\frac{1}{n}x+x_n\in\frac{1}{n}X\geq Y \qquad (n=1,2,\cdots)$$

だから $Y\leq 0$ である。したがって適当な $u\in N$ が存在して，$y+u\leq 0$ が成り立つ。

（十 分 性）　$S/N\ni X>0$ に対して $Y\in S/N$ が

$$\frac{1}{n}X\geq Y \qquad (n=1,2,\cdots)$$

であるとする。$X>0$ より $X\ni x>0$ なる x が存在し，任意の $y\in Y$ に対して

$$\frac{1}{n}x+x_n\geq y \qquad (n=1,2,\cdots)$$

なる $x_n\in N$ が存在する。したがって仮定より $y+u\leq 0$ である $u\in N$ が存在し，$y+u\in Y$ より $Y\leq 0$ である。したがって S/N はアルキメデアンである。

4. 附　　記

つぎの定理は容易に得られる。

定理 2.　S/N が全順序になるための必要十分条件は任意の $x\in S$ に対し

$$x+u\leq 0 \qquad \text{又は} \qquad x+u\geq 0$$

のいずれかを成立させる $u\in N$ が存在することである。

線形半順序空間が全順序でしかもアルキメデアンならば一次元である。したがって，定理1.，定理 2. の条件を満たすイデアル N が S と一致しなければ，S/N は一次元になることから，N は極大イデアルであることがわかる。

参 考 文 献

[1]　G. Birkhoff: Lettice Theory, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol. 25, 1948.
[2]　L. Brown and H. Nakano: A representation theorem for Archimedean linear lattices. Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 17, No. 4, 1966.