

# 同期電動機の同期化現象に関する研究 (第2報)

武 田 郁 夫

三 浦 五 郎\*

(昭和43年9月28日受理)

## Studies of the Pulling-into-Step Phenomenon of a Synchronous Motor. (Part 2)

by Ikuo TAKEDA and Goro MIURA

We had already reported at Part 1 in Memoirs of the Kitami Institute of Technology Vol. 2 No. 2, on the phenomenon of the pulling-into-step of a synchronous machine of which field time constant is neglected. By the use of phase plane methods, the phenomenon were analyzed and the critical conditions for pulling the step were theoretically obtained. In these cases, however, the numbers of swing were not limited.

In this paper, first, we develop an approximated theoretical analysis by approximating the limit cycle for the given phase plane equation. Based on this theory, the approximated theoretical formula is derived for the cylindrical rotor type.

Secondly, we derive the numerical experimental formulae which fairly coincides the strict criterion.

Thirdly, by using the testing machine of 15 [kVA], we get the experimental values in the case where no limit exists with the numbers of swing. These three values are well coincident with the exact theoretical values.

At last, by using the phase plane method when field time constant does not exist, we proved exactly that the best phase angle is 0 [rad] and the worst angle is  $\pi$  [rad].

By the use of the above results and a digital computer, we calculate the critical conditions for the pulling-into-step in the case where the number of swing stands at 1.

### 1. 緒 言

前報<sup>1)</sup>においては、同期電動機の引込み現象を界磁の時定数を無視した場合位相面解析により解析し、同期引込み条件を理論的に求め、あわせてその条件に対する定量的考察を加えた。本報では、第一報の理論的解析を基礎として発展させ、以下の4項目について考察し報告するものである。

1. 位相方程式より得られた条件から、突極機の引込み条件を近似理論的に求める方法を示し、円筒機においては、それより引込み条件の近似理論式を導出する。

\* 静岡大学工学部

2. すでに、デジタル計算機により求めた任意の  $b, g$  をパラメーターとする  $k_{\text{crit}}$  と  $\beta$  の関係を示す厳密理論値のグラフを視察することにより、精度の高い数値実験式を求める。

3. 3 相, 60 [Hz], 4 極, 200 [V], 15 [kVA] の突極形同期電動機を供試機として同期引込みの実験を行ない、実験結果と厳密理論値と比較検討する。

4. 界磁の時定数を無視した場合、同期電動機に励磁を入れて同期化させる際の最適位相角と最悪位相角は、正しく位相角が 0 [rad] および  $\pi$  [rad] であることを位相面解析より理論的に証明し、あわせてその結果を利用し、動揺回数を一回と制限した場合の同期引入れ条件の厳密値をデジタル計算機により求める。

## 2. 引込み条件の近似理論値の算出

### 2.1 $k_{\text{crit}}$ の際のリミットサイクルが満足する条件

突極形同期電動機の同期化成功の可否の範囲を、デジタル計算機により 4 個のパラメーターについて厳密に算出したが、今それを厳密理論値と称することにする。

いま、実際に計算してある  $\beta, b, g$  に対する厳密理論値  $k_{\text{crit}}$  が求められたとする。そのときにはリミットサイクルは、ある鞍形点を出発し、次の  $2\pi$  離れた鞍形点に入るトラゼクトリを形成している。逆にそのようなある鞍形点を出発したトラゼクトリが、次の鞍形点に入っているときには、そのトラゼクトリは少なくとも以下に求める 5 条件を満足している。

同期化現象の位相面方程式は界磁の時定数を無視した場合

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\beta - k(1 - b \cos 2x)y - g \sin 2x - \sin x}{y} \quad (1)$$

のように示される。ただし円筒形の場合は、 $b = g = 0$  である。鞍形点では右辺は 0/0 の不定の形であるので、l'Hospital の定理により右辺の分子分母を  $x$  で微分すると

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-k(1 + 2b \sin 2x)y - k(1 - b \cos 2x)\frac{dy}{dx} - 2g \cos 2x - \cos x}{\frac{dy}{dx}} \quad (2)$$

を得る。

いま考えている鞍形点の座標を  $(x_s, 0)$  とすれば

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_s} = \frac{-k(1 - b \cos 2x_s)\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_s} - (2g \cos 2x_s + \cos x_s)}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_s}} \quad (3)$$

変形して

$$\left\{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_s}\right\}^2 + k(1 - b \cos 2x_s)\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_s} + 2g \cos 2x_s + \cos x_s = 0 \quad (4)$$

を得る。

ゆえに (4) 式より

a) 鞍形点を出発するときの勾配

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_s} = \frac{-k(1-b \cos 2x_s)}{2} + \sqrt{\left\{\frac{k(1-b \cos 2x_s)}{2}\right\}^2 - (2g \cos 2x_s + \cos x_s)} \quad (5)$$

を得る。

b) 次の鞍形点に入るとき勾配

同様にして  $(x_s + 2\pi, 0)$  に入るとき勾配は次式のように求まる。

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_s+2\pi} = \frac{-k(1-b \cos 2x_s)}{2} - \sqrt{\left\{\frac{k(1-b \cos 2x_s)}{2}\right\}^2 - (2g \cos 2x_s + \cos x_s)} \quad (6)$$

c) リミットサイクルの平均値は第1報で求めたように

$$y_m = \frac{\beta}{k} \quad (7)$$

である。

d) 安定特異点の  $x$  座標を  $x_0$  とすれば,  $x_0$  においては

$$g \sin 2x_0 + \sin x_0 = \beta \quad (8)$$

を満足し, 鞍形点どおしを通過するリミットサイクルにおいては,  $x_0$  に対応する  $y$  の値  $y_0$  は  $y_0 \neq 0$  なるゆえ, 位相面方程式 (1) は

$$y_0 \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} + k(1-b \cos 2x_0) y_0 = 0 \quad (9)$$

となるから

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = -k(1-b \cos 2x_0) \quad (10)$$

と示される。

e) 位相面方程式 (1) より得られる  $dy/dx=0$  と, 鞍形点どおしを通過するリミットサイクルとの交点では

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad (11)$$

を満足する。

以上求めた (5), (6), (7), (10), (11) の各式が5条件として与えられる。

## 2.2 突極機における近似理論値の求値

座標系を平行移動し任意の鞍形点  $(x_s, 0)$  を原点に移動し,  $x = x' + x_s$  と変換する。  $0 \leq x' \leq 2\pi$  の範囲で, 鞍形点どおしを通過するリミットサイクルをいま

$$y(x') = a_1 \sin \frac{x'}{2} + a_2 \sin x' + a_3 \sin \frac{3}{2} x' + a_4 \sin 2x' \quad (12)$$

なる関数にて仮定する。

(5) 式の条件を入れて

$$y'(0) = \frac{a_1}{2} + a_2 + \frac{3}{2} a_3 + 2a_4 = \frac{-k(1-b \cos 2x_s)}{2} + \alpha \quad (13)$$

(6) 式の条件を入れて

$$y'(2\pi) = -\frac{a_1}{2} + a_2 - \frac{3}{2} a_3 + 2a_4 = \frac{-k(1-b \cos 2x_s)}{2} - \alpha \quad (14)$$

ただし

$$\alpha = \sqrt{\left\{ \frac{k(1-b \cos 2x_s)}{2} \right\}^2 - (2g \cos 2x_s + \cos x_s)} \quad (15)$$

(7) 式の条件を入れて

$$\int_0^{2\pi} y(x') dx = 4a_1 + \frac{4}{3} a_3 = 2\pi \frac{\beta}{k} \quad (16)$$

(10) 式の条件を入れて,  $x'_0 = x_0 + 2\pi - x_s$  とすれば

$$\begin{aligned} y'(x'_0) &= \frac{a_1}{2} \cos \frac{x'_0}{2} + a_2 \cos x'_0 + \frac{3}{2} a_3 \cos \frac{3}{2} x'_0 + 2a_4 \cos 2x'_0 \\ &= -k(1-b \cos 2x_0) \end{aligned} \quad (17)$$

これらの式を解くことにより各係数は

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{8} \left( -2\alpha + \frac{9\pi\beta}{2k} \right) \\ a_2 &= \frac{\left\{ \frac{k(1-b \cos 2x_s) \cos 2x'_0}{2} + h \right\}}{(\cos x'_0 - \cos 2x'_0)} \\ a_3 &= \frac{3}{8} \left( 2\alpha - \frac{\pi\beta}{2k} \right) \\ a_4 &= \frac{\left\{ \frac{k(1-b \cos 2x_s) \cos x'_0}{2} + h \right\}}{2(\cos 2x'_0 - \cos x'_0)} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

を得る。

ただし

$$h = -k(1-b \cos 2x'_0) - \frac{a_1}{2} \cos \frac{x'_0}{2} - \frac{3}{2} a_3 \cos \frac{3}{2} x'_0 \quad (19)$$

位相面方程式の4個のパラメーターが定まれば,  $a_1, a_2, a_3, a_4$  が定まる。次に  $b, g, \beta$  を任意に固定し  $k$  を (11) 式の条件を考慮に入れ動かすことによって, すなわち  $dy/dx=0$  の軌跡との交点における勾配の絶対値を最小になるように  $k$  を動かすことによって  $k_{\text{erit}}$  を定める



$$\left. \begin{aligned} a_1 &= 2\alpha \\ a_2 &= -\frac{k}{2} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

(23), (24) 両式より

$$2\pi \frac{\beta}{k} = 8\alpha \quad (25)$$

(15) 式より

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 - \cos x_s} = \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 + \sqrt{1-\beta^2}} \quad (26)$$

(25) 式の両辺を 2 乗して整理すると

$$k^4 + 4\sqrt{1-\beta^2} k^2 - \frac{\pi^2}{4} \beta^2 = 0 \quad (27)$$

なる関係式を得る。

$k$  は実数でかつ  $k \geq 0$  であることを考慮に入れ、 $k$  について解けば

$$k = \sqrt{-2\sqrt{1-\beta^2} + \sqrt{4-\beta^2}\left(4-\frac{\pi^2}{4}\right)} \quad (28)$$

(28) 式は臨界の  $k$  すなわち  $k_{\text{crit}}$  を与える式を示すので、円筒形の場合のある  $\beta$  に対する同期引込み可能な  $k$  の条件を示す近似理論式が次式のように得られる。

$$k \geq \sqrt{-2\sqrt{1-\beta^2} + \sqrt{4-\beta^2}\left(4-\frac{\pi^2}{4}\right)} \quad (29)$$

### 3. 引込み条件を与える数値実験式

#### 3.1 円筒機の場合

ディジタル計算機によりすでに求めた任意の  $b, g$  をパラメーターとする  $k_{\text{crit}}$  と  $\beta$  の関係を示す厳密理論値のグラフを視察することにより

- 1)  $\beta$  が小なるときは  $k_{\text{crit}}$  と  $\beta$  の関係は比例関係にある。
- 2)  $\beta$  が大なるにしたがって  $k_{\text{crit}}$  と  $\beta$  の関係は飽和性を呈する。

以上の 2 点を考慮することにより

$$k_{\text{crit}} = 0.775 \sin^{-1} \beta \quad (30)$$

なる数値試験式を得た<sup>2)</sup>。この数値実験式は誤差が最大 1.5% を超えず、非常に精度の高い値を示している。

#### 3.2 突極機の場合

突極機においても、すでに求めた厳密理論値のグラフを視察することにより

- 1)  $\beta$  のとりうる最大値は  $g$  によってきまる。



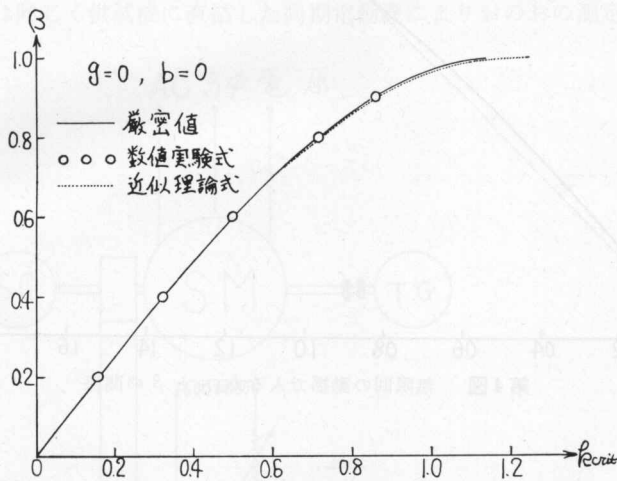
2)  $g=0$  のときは  $b$  が大なるほど同じ  $\beta$  に対して  $k_{crit}$  は小さい。すなわち安定領域大である。しかしあまり差異はみられない。

3)  $g \neq 0$  のときは大部分のところでは  $b$  大なるほど安定領域小である。すなわち同じ  $g$ ,  $\beta$  に対して  $k_{crit}$  が大である。そのときの  $k_{crit}$  が大なる様子は  $g$  が一定ならば,  $\beta$  大なるほど  $b$  の影響大で, 同じように  $\beta$  を固定したならば,  $g$  大なるほど  $b$  の影響大である。

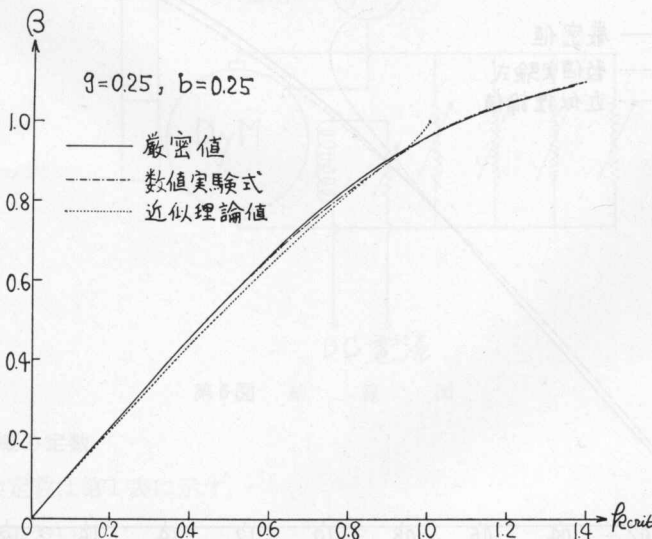
4) すべての場合  $\beta$  と  $k_{crit}$  の関係は飽和性を示す。

ということがわかる。以上のことを比較的良く満足する数値実験式として

$$k_{crit} = (0.775 + 0.7g + 0.4\beta^{\frac{3}{2}}bg - 0.04b) \sin^{-1} \left\{ \frac{\beta}{(1 + 0.88g^{\frac{3}{2}})} \right\} \quad (31)$$



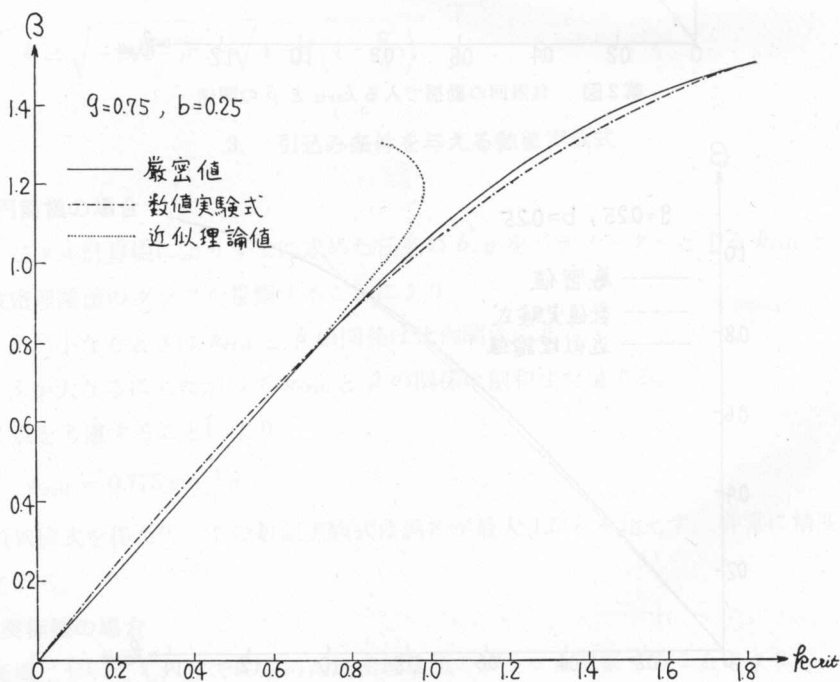
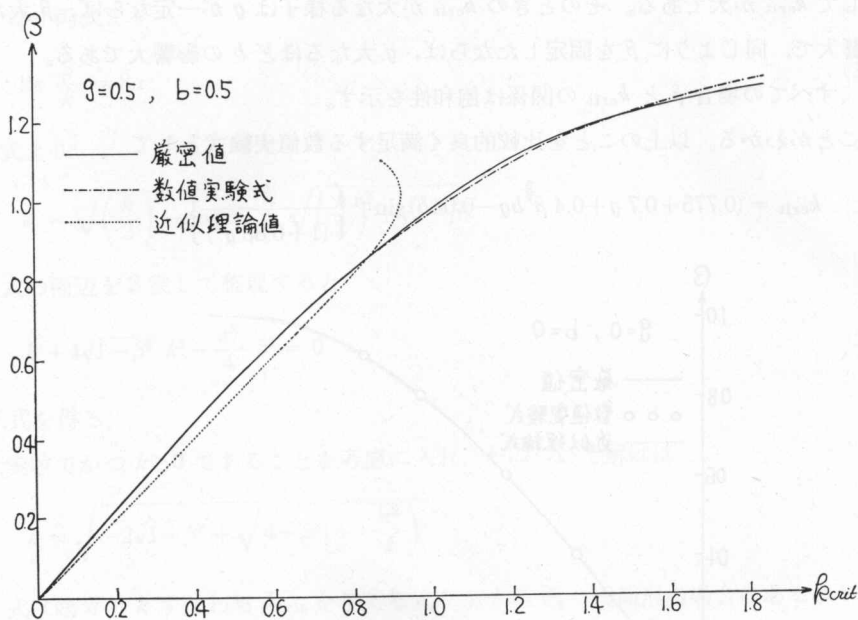
第2図 無限回の動揺で入る  $k_{crit}$  と  $\beta$  の関係



第3図 無限回の動揺で入る  $k_{crit}$  と  $\beta$  の関係

を得た。なお、この式に円筒機の条件  $b=g=0$  を代入すれば、(30) 式に一致する。

以上のべてきた 1) 厳密理論値、2) 近似理論値、3) 数値実験式による値のそれぞれの比較のグラフを、第2図より第5図に示す。ただし突極機については適当な  $b, g$  のパラメー



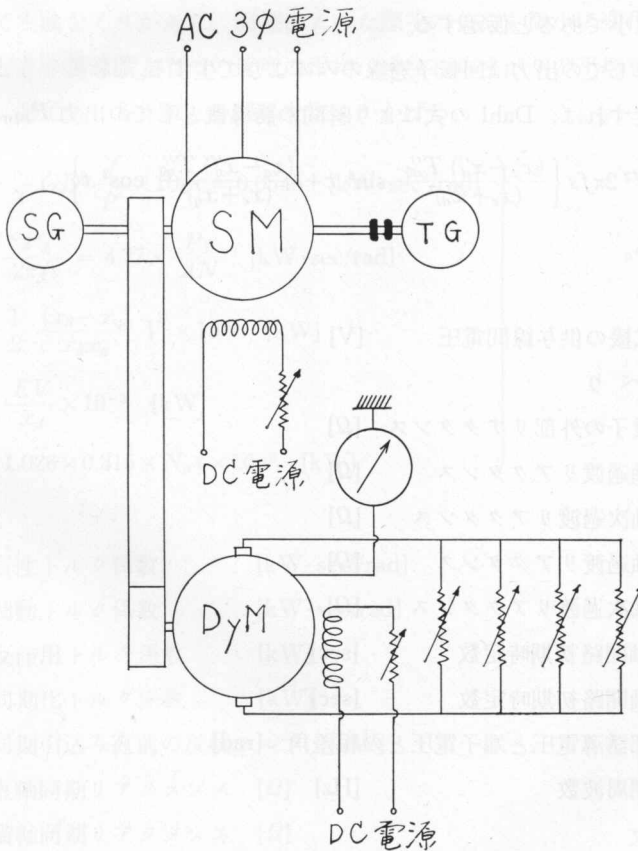


ターについてのみかかげた。1), 2), 3) の3者ともほとんど一致しているが、2) の近似理論値の  $\beta$  大なる値における差異は、(12) 式の高調波成分の取り方の影響によるものと思われる。

#### 4. n Swing で入る臨界条件を求める実験とその結果に対する検討

##### 4.1 実験装置

結線図を第6図に示す。ここで供試電動機は、15 [kVA], 220 [V], 39.4 [A], 4 極, 60 [Hz] の安川電機製三相突極形同期電動機を使用し、負荷として供試機に調帯結合した直流形電気動力計を用いた。また、すべりの測定には供試機に直結したタコジェネレーターにより、相差角のチェックには同じく供試機に直結した同期電動機によりおのおの測定した。



第6図 結線図

##### 4.2 供試電動機の定数

供試電動機の定数は第1表に示す。

ただし第1表において

- 1)  $GD^2$  の値は、供試電動機、負荷としての電気動力計、すべりの測定に用いたタコジェ

第1表 供試電動機の定数

定格出力	15 [kVA]	$x_d$	3.94 [ $\Omega$ ] (p.u. 1.22)	$x'_q$	1.69 [ $\Omega$ ] (p.u. 0.525)
定格線間電圧	220 [V]	$x'_d$	0.80 [ $\Omega$ ] (p.u. 0.248)	$T''_{d0}$	13.6 [msec]
定格電流	39.4 [A]	$x''_d$	0.45 [ $\Omega$ ] (p.u. 0.140)	$T''_{q0}$	12.5 [msec]
極数	4	$x_q$	1.96 [ $\Omega$ ] (p.u. 0.609)	$GD^2$	2.32 [kg-m <sup>2</sup> ]
定格周波数	60 [Hz]	$x'_q$	1.96 [ $\Omega$ ] (p.u. 0.609)	$b$	0.8

ネレーター，相差角測定用の同期電動機の総和の値である。

2) b の算出は

- ア) 電動機回路の抵抗を無視する。
- イ) 界磁回路の抵抗を無視する。
- ウ) すべりは小であると仮定する。
- エ) 誘導機としての出力は回転子巻線のみによりて生ずる。

という4項目を仮定すれば，Dahl の式により瞬間の誘導機としての出力  $P_{din}$  は

$$P_{din} = V^2 2\pi fs \left\{ \frac{(x'_d - x''_d) T''_{d0}}{(x_e + x'_d)^2} \sin^2 x + \frac{(x'_q - x''_q) T''_{q0}}{(x_e + x'_q)^2} \cos^2 x \right\} \tag{32}$$

のように表わされる。

ここで

- $V$ : 供試機の供与線間電圧 [V]
- $s$ : すべり
- $x_e$ : 電機子の外部リアクタンス [ $\Omega$ ]
- $x'_d$ : 直軸過渡リアクタンス [ $\Omega$ ]
- $x''_d$ : 直軸次過渡リアクタンス [ $\Omega$ ]
- $x'_q$ : 横軸過渡リアクタンス [ $\Omega$ ]
- $x''_q$ : 横軸次過渡リアクタンス [ $\Omega$ ]
- $T''_{d0}$ : 直軸開路初期時定数 [sec]
- $T''_{q0}$ : 横軸開路初期時定数 [sec]
- $x$ : 内部誘導電圧と端子電圧との相差角 [rad]
- $f$ : 同期周波数 [Hz]

いま (32) 式において

$$A = \frac{(x'_d - x''_d)}{(x_e + x'_d)^2} T''_{d0} \tag{33}$$

$$B = \frac{(x'_q - x''_q)}{(x_e + x'_q)^2} T''_{q0} \tag{34}$$

とおけば，(32) 式は

$$P_{din} = \frac{V^2 2\pi fs (A+B)}{2} \left( 1 - \frac{A-B}{A+B} \cos 2x \right) \quad (35)$$

となる。したがって脈動係数  $b$  は

$$b = \frac{A-B}{A+B} \quad (36)$$

で表わされる。 $A$  および  $B$  は供試電動機の定数により算定することができる。本実験においては  $x_c=0$  とて  $b$  を算定した。

#### 4.3 実験方法およびその結果

供試機の界磁を短絡して誘導機として任意の負荷を負わせて運転させ、同期速度付近になったとき励磁を加えて同期に入るか否かをまず調べる。同期に入らない場合は負荷を減少させて同期化するまで実験をくりかえし、同期に入った際その負荷を微小に変化させて臨界の負荷を定める。そのときの誘導機としての速度の平均、すなわちすべりの平均をタコジェネレーターより測定する。測定値と各係数との関係を次にかかげる。

$$\left. \begin{aligned} P_J &= \frac{\pi}{2} GD^2 \frac{f}{p^2} \times 10^{-3} = 0.0546 \quad [\text{kW} \cdot \text{sec}^2/\text{rad}] \\ P_D &= \frac{P_L}{2\pi fs} = 4.77 \times \frac{P_L}{\Delta N} \quad [\text{kW} \cdot \text{sec}/\text{rad}] \\ P_R &= \frac{1}{2} \frac{(x_d - x_q)}{x_d x_q} V^2 \times 10^{-3} \quad [\text{kW}] \\ P_m &= \frac{EV}{x_d} \times 10^{-3} \quad [\text{kW}] \\ P_L &= 1.026 \times 0.315 \times N_d \tau \times 10^{-3} \quad [\text{kW}] \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

ここで

$P_J$ : 慣性トルク係数  $[\text{kW} \cdot \text{sec}^2/\text{rad}]$

$P_D$ : 制動トルク係数  $[\text{kW} \cdot \text{sec}/\text{rad}]$

$P_R$ : 反作用トルク係数  $[\text{kW}]$

$P_m$ : 同期化トルク係数  $[\text{kW}]$

$P_L$ : 同期引込み直前の反抗トルク  $[\text{kW}]$

$x_d$ : 直軸同期リアクタンス  $[\Omega]$

$x_q$ : 横軸同期リアクタンス  $[\Omega]$

$\Delta N$ : 同期速度一回転速度  $[\text{rpm}]$

$N_d$ : 電気動力計の速度  $[\text{rpm}]$

$\tau$ : 電気動力計のトルクの読み  $[\text{kg}]$

ゆえに、正規化されたパラメーターと実際の測定値との関係は

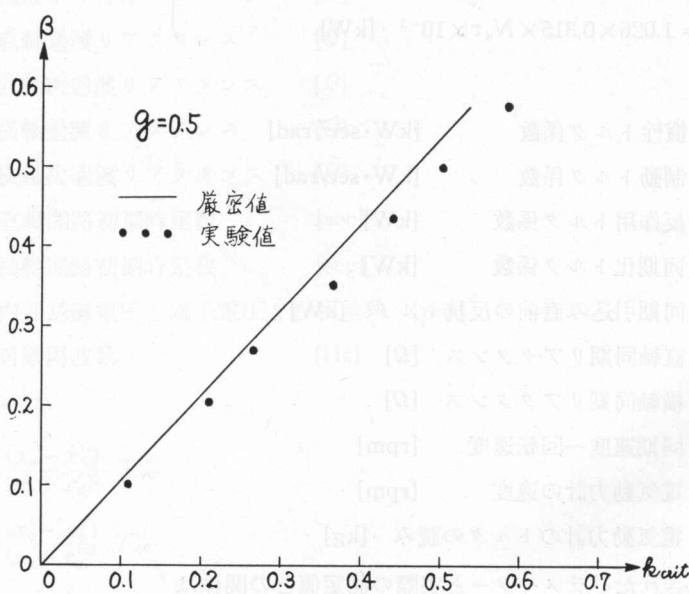
$$\left. \begin{aligned} g &= \frac{P_L}{P_m} = 0.505 \times \frac{V}{E} \\ k &= \frac{P_D}{\sqrt{P_m P_j}} = 4.14 \times \frac{N_d \tau}{\sqrt{EV} \Delta N} \times 10^{-1} \\ \beta &= \frac{P_L}{P_m} = 1.27 \times \frac{N_d \tau}{EV} \end{aligned} \right\} \tag{38}$$

ただし、 $E$  は公称誘導線間起電力 [V] である。

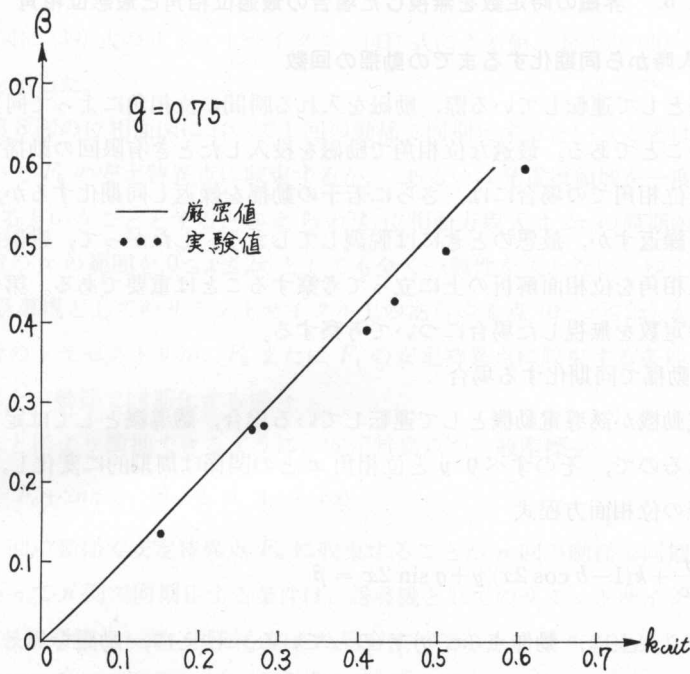
実験値の測定にあたっては、 $g=0.505\ V/E$  なる関係があるゆえ、 $E$  と  $V$  との比を任意に設定することができる。 $V/E$  の比を一定にしたまま  $V$  および  $E$  を変えることにより、任意の  $g$  に対して供試機の許す範囲内で  $\beta$  を変えることができる。われわれは、 $g=0.5$ 、 $g=0.75$  に適するように  $E$  と  $V$  の比を設定して実験を行なった。こうして得られた実験結果と厳密理論

第2表 実験結果

$g=0.5$	$k_{crit}$	実験値	厳密値	$g=0.75$	$k_{crit}$	実験値	厳密値
	$\beta$				$\beta$		
$g=0.5$	0.102	0.110	0.098	$g=0.75$	0.136	0.154	0.138
	0.206	0.211	0.194		0.268	0.264	0.261
	0.271	0.266	0.253		0.272	0.281	0.265
	0.355	0.366	0.330		0.391	0.410	0.373
	0.436	0.442	0.405		0.429	0.445	0.408
	0.500	0.507	0.465		0.494	0.509	0.468
	0.576	0.589	0.539		0.596	0.610	0.565



第7図 (a) 実験結果



第7図(b) 実験結果

値との比較の結果を第2表および第7図に示す。

#### 4.4 実験結果に対する検討

実験結果に示されるごとく、実験値はすべて厳密理論値より大なる値、すなわち安定領域にあらわれている。これは実験に際して同期に入ったか否かの判定は約10回で振動したら入らないとしたため、厳密理論値で仮定した無限回で入るという条件より厳しい条件であるということと、いま一つは負荷比  $\beta$  を計算するための負荷  $P_L$  は誘導機として運転しているとき測定したものであるが、実際同期に入るためには供試電動機の手速は、同期化現象中上昇しなければならない。そのことは調帯結合された直流電気動力計の手速の上昇を意味する。すなわち負荷  $P_L$  いかえれば  $\beta$  が増大する。

したがって励磁を入れた後も振動を繰返していれば、ほとんど見かけの  $\beta$  は変わらないのであるが、前述した理由により同期に入ろうとすると  $\beta$  が増大するので、実際は実験値にかかげある  $\beta$  より大きいことと等価であるためである。以上のことを考慮すると実験値はほぼ厳密理論値と合致していると考えられ、位相面解析より得た厳密理論値の正当性を立証しうると考えられる。

## 5. 界磁の時定数を無視した場合の最適位相角と最悪位相角

### 5.1 励磁投入時から同期化するまでの動揺の回数

誘導電動機として運転している際、励磁を入れる瞬間の位相角によって同期化に難易があることは周知のことである。最適な位相角で励磁を投入したとき有限回の動揺で同期化したものでも、最悪な位相角での場合には、さらに若干の動揺を繰返し同期化するか、または同期化せず永久振動を繰返すか、最悪のときには脱調してしまう。したがって、励磁投入の際の最適位相角、最悪位相角を位相面解析の上に立って考察することは重要である。第一段階として、本報は界磁の時定数を無視した場合について考察する。

#### a) 1 回の動揺で同期化する場合

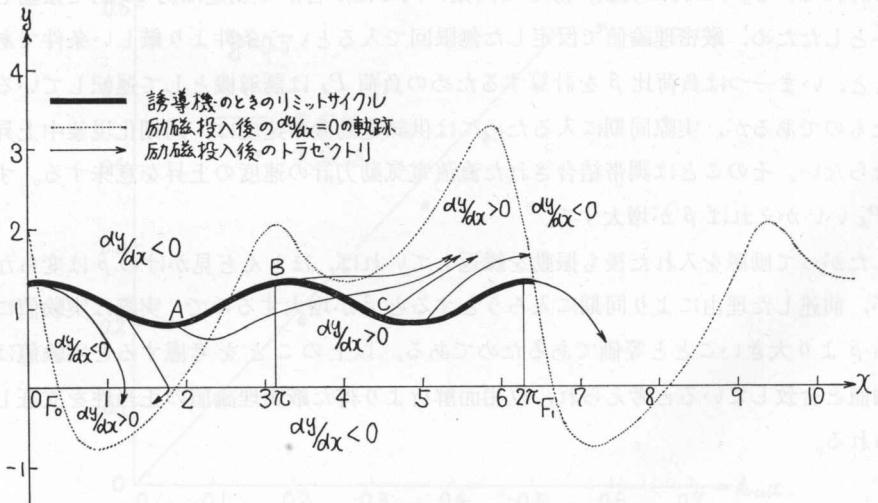
最初同期電動機が誘導電動機として運転している場合、誘導機としては定常状態に入っていると考えられるので、そのすべり  $y$  と位相角  $x$  との関係は周期的に変化し、誘導機として運転している際の位相面方程式

$$y \frac{dy}{dx} + k(1 - b \cos 2x) y + g \sin 2x = \beta \quad (39)$$

のリミットサイクル上に、動作点  $(x, y)$  がのっている。ゆえに、励磁を加える瞬間の初期値  $(x, y)$  は、このリミットサイクル上の値に限定される。このリミットサイクル上のある初期値にて励磁を投入した後は、時定数を無視すると

$$y \frac{dy}{dx} + k(1 - b \cos 2x) y + g \sin 2x + \sin x = \beta \quad (40)$$

の位相面方程式を満足するトラゼクトリを描く。(40) 式の  $dy/dx=0$  の軌跡は



第8図 突極機における励磁投入時の最適位相角と最悪位相角を求めるための説明図



$$y = \frac{\beta - g \sin 2x - \sin x}{k(1 - b \cos 2x)} \quad (41)$$

である。第8図に(39)式のリミットサイクル、(41)式による値、および(40)式の  $dy/dx$  の分布の状態の例を示した。

ところで第8図の位相面図において1回の動揺で同期化するということは、1度も発電機領域を通らないで  $F_0$  の安定特異点に収束するか、あるいは発電機領域を一度通過し安定特異点  $F_1$  に収束するということとする。与えられた位相面方程式は  $2\pi$  の周期函数であるゆえ、取りうる初期値の  $x$  の範囲を  $0 \leq x \leq 2\pi$  としても全く一般性を失わない。ゆえに1回で同期化する条件は、誘導機としてのリミットサイクル上のあらゆる点 ( $0 \leq x \leq 2\pi$ ) を初期値として励磁を加えた場合のトラゼクトリが、 $F_0$  または  $F_1$  の安定特異点に収束する条件となる。

#### b) 2回以上の動揺で同期化する場合

前述したことにより類推できるように、安定特異点の一般座標を

$$F_n = F_0 + 2n\pi \quad (n=2, 3, 4, \dots \infty) \quad (42)$$

と表わせば、 $n$  回の動揺で安定特異点  $F_n$  に収束することが  $n$  回の動揺で同期化する場合に相当する。したがって  $n$  回で同期化する条件は、誘導機としてのリミットサイクル上のあらゆる点 ( $0 \leq x \leq 2\pi$ ) を初期値として、励磁を加えた場合すべてのトラゼクトリが、すくなくとも  $F_n$  の安定特異点までの動揺で同期化しなければならぬ条件となる。

### 5.2 最適位相角と最悪位相角の決定

#### a) 1回の動揺後に同期化する場合の最適位相角と最悪位相角

いま、 $0 \leq x \leq \pi$  で励磁が投入された場合を考える。 $x$  が  $0 \leq x \leq \pi$  ならば  $0 \leq \sin x \leq 1$  であるので、その範囲のある座標  $(x, y)$  における勾配  $dy/dx$  の大きさは、(39)、(40) 両式より

$$\text{誘導機の } \frac{dy}{dx} \geq \text{励磁投入後の } \frac{dy}{dx} \quad (43)$$

の不等式を満足する。

$\pi \leq x \leq 2\pi$  ならば

$$\text{誘導機の } \frac{dy}{dx} \leq \text{励磁投入後の } \frac{dy}{dx} \quad (44)$$

の不等式を満足する。

すなわち、 $0 \leq x \leq \pi$  で励磁が投入されたならば  $0 \leq x \leq \pi$  では、励磁投入後のトラゼクトリは誘導機の状態でのリミットサイクルと一度も交わることなく、必ずリミットサイクルの下側を動き、一方  $\pi \leq x \leq 2\pi$  で励磁されたならば  $\pi \leq x \leq 2\pi$  の範囲では逆にそのトラゼクトリはリミットサイクルの上側を必ず動く。第8図において A, B, C 各点はそれぞれ誘導機のリミットサイクル上の点を示し

A 点の  $x$  座標  $< \pi$



B 点の  $x$  座標  $= \pi$

C 点の  $x$  座標  $> \pi$

である。A 点のように  $x < \pi$  より出発したトラゼクトリは、 $F_0$  に入る場合を除けば  $x = \pi$  まで進む。そのトラゼクトリの  $x = \pi$  のときの  $y$  座標を  $y_1$ 、誘導機のリミットサイクル上の B 点の  $y$  座標を  $y_B$  とすれば、 $y_1 < y_B$  となる。ゆえに、 $x < \pi$  より出発したトラゼクトリは、 $F_0$  に収束するか、または  $x$  が  $\pi$  以上になれば、 $(\pi, y_B)$  より出発したトラゼクトリに包含される。一方  $\pi < x \leq 2\pi$  より励磁を投入したならばトラゼクトリは、やはり  $(\pi, y_B)$  より出発したトラゼクトリに包含される。したがって誘導機のリミットサイクル上の  $x = \pi$ 、すなわち B 点より出発したトラゼクトリが最も同期化し難い。ゆえに、 $x = \pi$  が最悪位相角となる。

また以上のべたことより、 $0 \leq x \leq \pi$  より出発したトラゼクトリは、 $x$  大なるほど上側にあらわれることがわかる。したがって  $x = 0$  より出発したトラゼクトリは、 $0 < x \leq \pi$  より出発したすべてのトラゼクトリに包含されるので、 $0 \leq x \leq \pi$  の領域では  $x = 0$  が最適位相角であり、 $x = \pi$  が最悪位相角である。

一方、 $\pi \leq x \leq 2\pi$  より出発したトラゼクトリは、逆に  $x$  大なるほど下側にあらわれる。したがって  $x = 2\pi$  より出発したトラゼクトリは、 $\pi \leq x < 2\pi$  より出発したすべてのトラゼクトリに包含されるので、 $\pi \leq x \leq 2\pi$  の領域では、 $x = 2\pi$  が最適位相角であり、 $x = \pi$  が最悪位相角であることがわかる。ところで  $x = 2\pi$  より出発したトラゼクトリが  $F_1$  に収束する条件というのは、 $x = 0$  より出発したトラゼクトリが  $F_0$  に収束する条件と全く等しいゆえ、 $x = 0$  が  $0 \leq x \leq 2\pi$  の領域で最適位相角である。

#### b) 2 回以上の動揺後に同期化する場合の最適位相角と最悪位相角

$0 \leq x \leq 2\pi$  より出発したトラゼクトリは、もし  $F_0$  または  $F_1$  に収束しないならば、次の発電機領域に進行する。その際にもやはり  $0 \leq x \leq 2\pi$  より出発したすべてのトラゼクトリは、 $x = 0$  より出発したトラゼクトリの上側であり、 $x = \pi$  より出発したトラゼクトリの下側である。したがって任意の  $n$  回を定めても、常に  $x = 0$  が最適位相角であり、 $x = \pi$  が最悪位相角である。

#### c) 円筒形同期電動機の場合

誘導電動機として運転している場合、変換時間  $\tau$  に関する微分方程式は  $y = dx/d\tau$  において

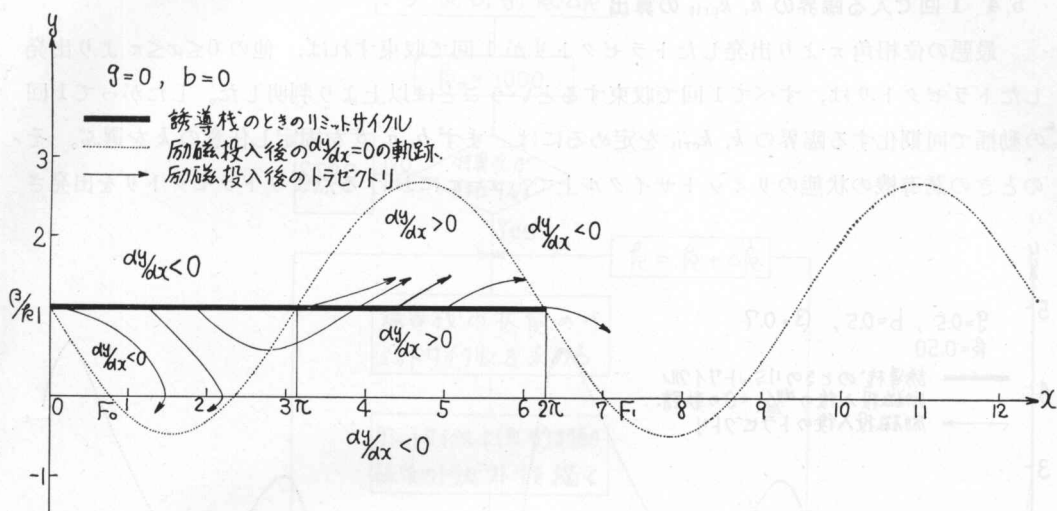
$$\frac{dy}{d\tau} + ky = \beta \quad (45)$$

で示される。この式は線形であるので簡単にとけて

$$y = \frac{\beta}{k} + ce^{-k\tau} \quad (46)$$

となる。ここで  $c$ : 任意定数

誘導機の状態では定常状態なので、 $\tau \rightarrow \infty$  において



第9図 円筒機における最適位相角と最悪位相角を求めるための説明図

$$y = \frac{\beta}{k} \quad (47)$$

となり、定数である。したがってリミットサイクルは直線となる。励磁投入後の位相面方程式は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\beta - ky - \sin x}{y} \quad (48)$$

で与えられる。第9図に誘導機として運転している際のリミットサイクル, 励磁投入後の  $dy/dx$  の分布, およびトラゼクトリの様子を概略を示した。第9図の視察ならびに突極形についてのべた考察より,  $x=0$  が最適位相角,  $x=\pi$  が最悪位相角であることがわかる。

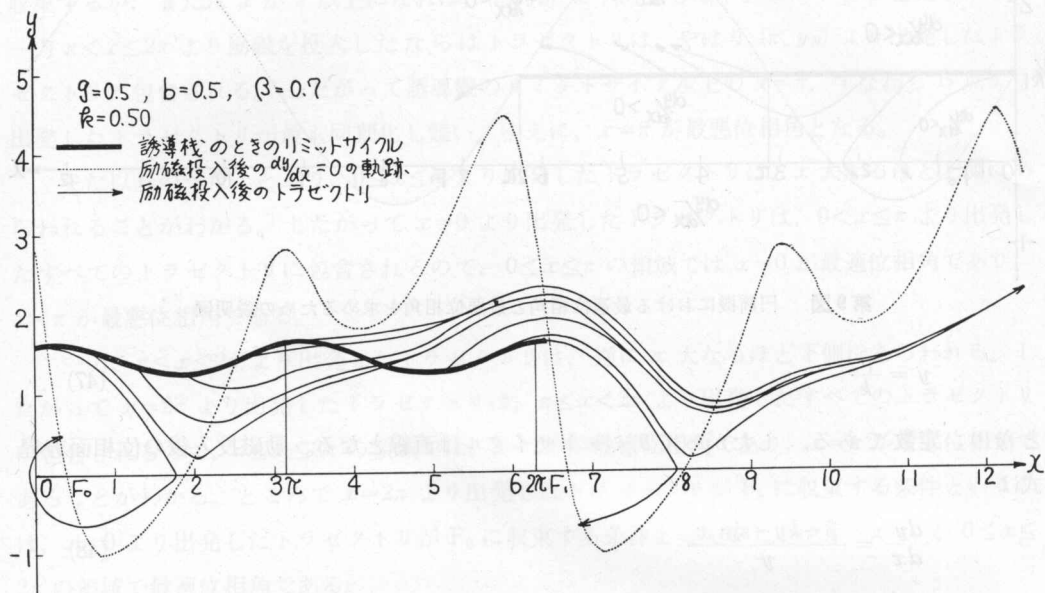
結局, 時定数を考慮しない場合は円筒形でも突極形でも, 最適位相角は0, 最悪位相角は  $\pi$  である。

### 5.3 計算結果の一例

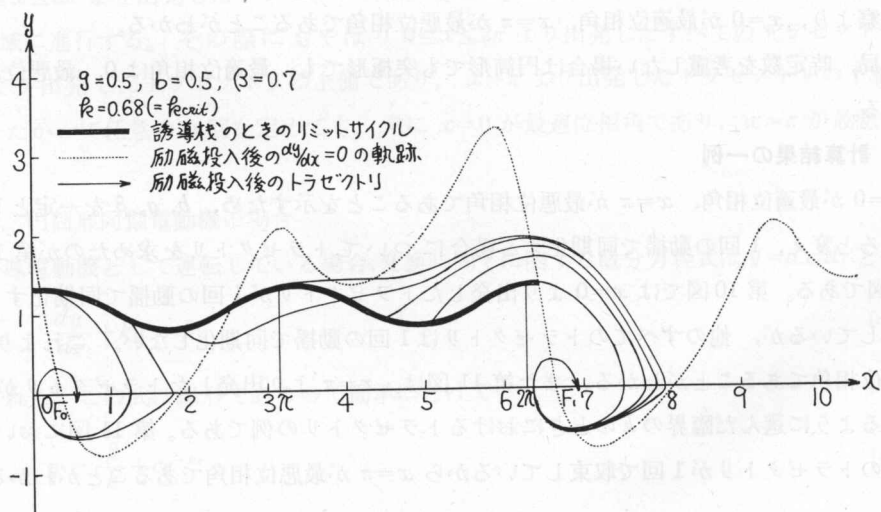
$x=0$  が最適位相角,  $x=\pi$  が最悪位相角であることを示すため,  $b, g, \beta$  を一定とし  $k$  をいろいろと変え, 1回の動揺で同期化する場合についてトラゼクトリを求めたのが第10図, 第11図である。第10図では  $x=0$  より出発したトラゼクトリが1回の動揺で同期化することを満足しているが, 他のすべてのトラゼクトリは1回の動揺で同期化しない。これより  $x=0$  が最適位相角であることがわかる。また第11図は,  $x=\pi$  より出発したトラゼクトリが  $F_1$  に収束するように選んだ臨界の  $k$  のときにおけるトラゼクトリの例である。第11図においては, すべてのトラゼクトリが1回で収束しているから  $x=\pi$  が最悪位相角であることがわかる。

#### 5.4 1回で入る臨界の $k$ , $k_{crit}$ の算出

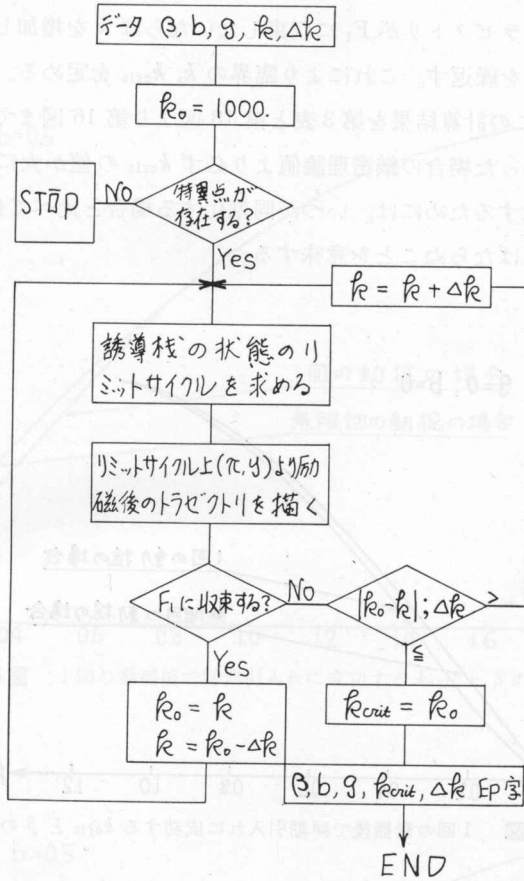
最悪の位相角  $\pi$  より出発したトラゼクトリが1回で収束すれば、他の  $0 \leq x \leq \pi$  より出発したトラゼクトリは、すべて1回で収束するということは以上より判明した。したがって1回の動揺で同期化する臨界の  $k$ ,  $k_{crit}$  を定めるには、まず  $b, g, \beta$  を固定し任意の  $k$  を選ぶ。そのときの誘導機の状態のリミットサイクル上で、 $x=\pi$  における点よりトラゼクトリを出発さ



第10図 突極機のトラゼクトリの計算例 ( $x=0$  で臨界相対制動係数を求めた場合)

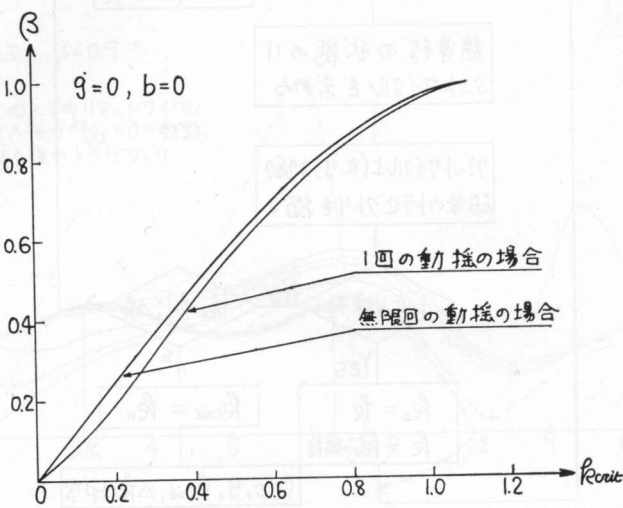


第11図 突極機のトラゼクトリの計算例 ( $x=\pi$  で臨界相対制動係数を求めた場合)

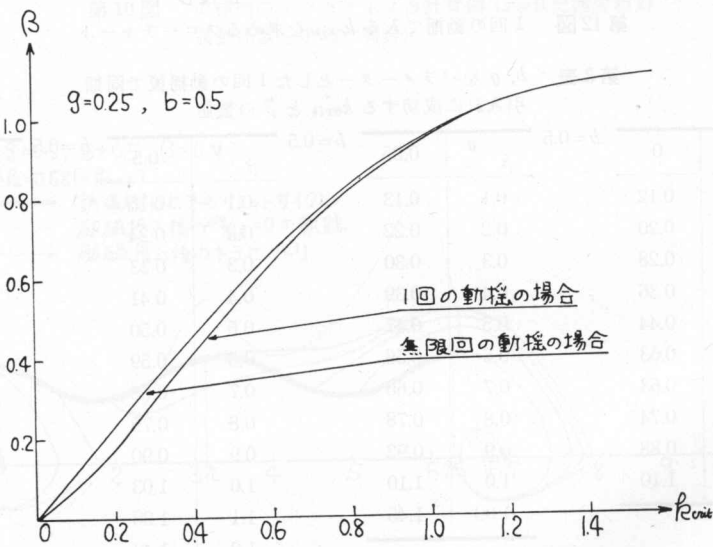
第12図 1回の動揺で入る  $k_{crit}$  を求めるフローチャート第3表  $b, g$  をパラメーターとした1回の動揺後で同期引入れに成功する  $k_{crit}$  と  $\beta$  の数値

$b=0$		$b=0.5$		$b=0.5$		$b=0.5$	
$\beta$	$g$	$\beta$	$g$	$\beta$	$g$	$\beta$	$g$
	0		0.25		0.5		0.75
0.1	0.12	0.1	0.13	0.1	0.15	0.1	0.16
0.2	0.20	0.2	0.22	0.2	0.24	0.2	0.25
0.3	0.28	0.3	0.30	0.3	0.33	0.3	0.34
0.4	0.36	0.4	0.39	0.4	0.41	0.4	0.42
0.5	0.44	0.5	0.47	0.5	0.50	0.5	0.50
0.6	0.53	0.6	0.56	0.6	0.59	0.6	0.59
0.7	0.63	0.7	0.66	0.7	0.68	0.7	0.67
0.8	0.74	0.8	0.78	0.8	0.79	0.8	0.77
0.9	0.88	0.9	0.92	0.9	0.90	0.9	0.87
0.99	1.10	1.0	1.10	1.0	1.03	1.0	0.98
		1.09	1.45	1.1	1.20	1.1	1.10
				1.2	1.43	1.2	1.24
				1.29	1.89	1.3	1.41
						1.4	1.64
						1.5	2.05

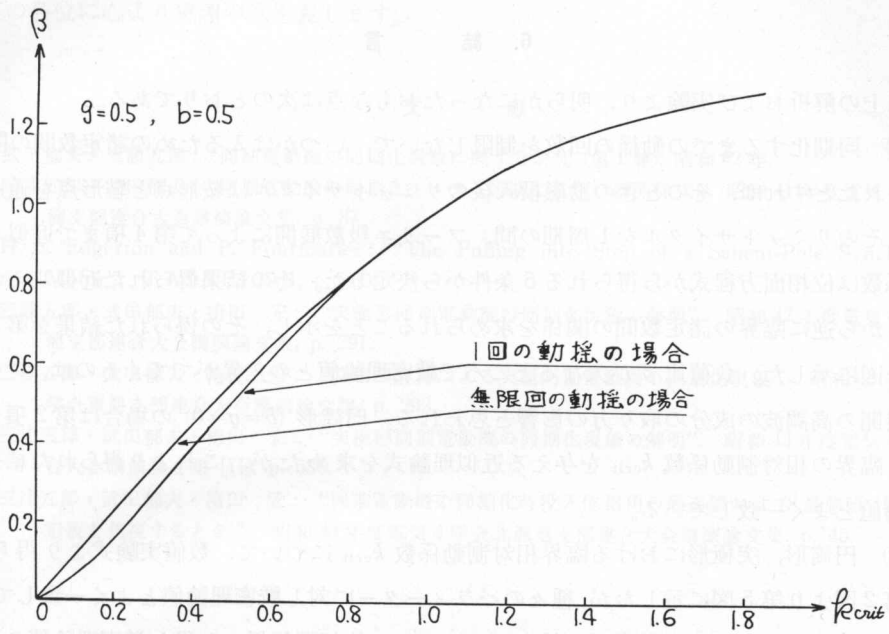
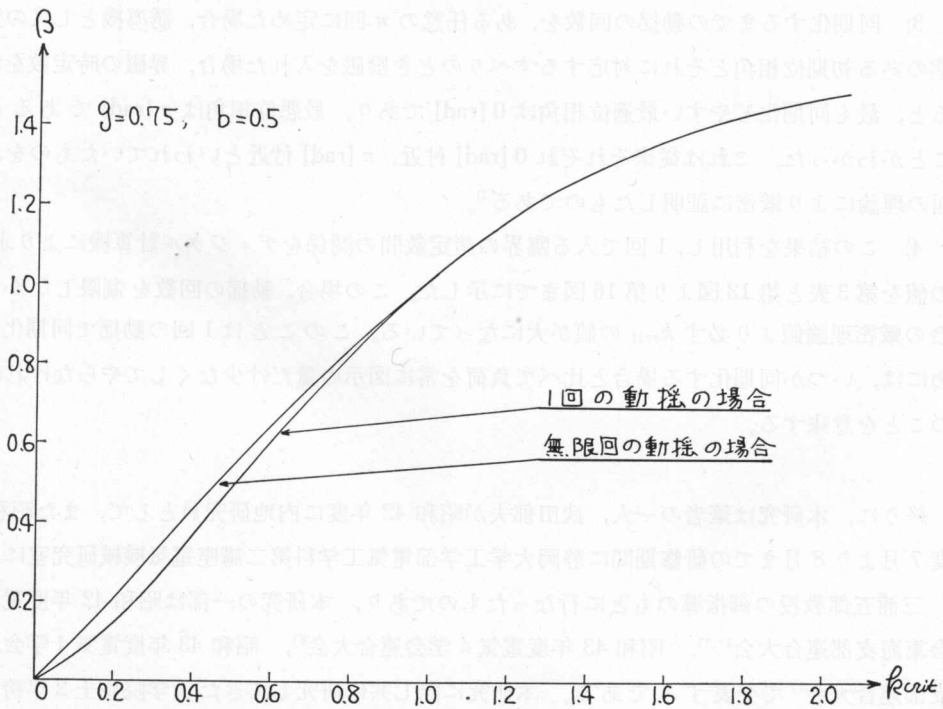
せる。次に、もしそのトラゼクトリが  $F_1$  に収束しないならば  $k$  を増加し、 $F_1$  に収束すれば  $k$  を減少し、再びその計算を繰返す。これにより臨界の  $k$ ,  $k_{crit}$  を定める。この計算のプロチャートを図 12 に示す。この計算結果を第 3 表と第 13 図より第 16 図までに示した。この場合、動揺の回数を制限しなかった場合の厳密理論値より必ず  $k_{crit}$  の値が大になっている。このことは 1 回の動揺で同期化するためには、いつか同期化する場合と比べて負荷を常に図示の量だけ少なくしてやらなければならぬことを意味する。



第 13 図 1 回の動揺後で同期引入れに成功する  $k_{crit}$  と  $\beta$  の関係



第 14 図 1 回の動揺後で同期引入れに成功する  $k_{crit}$  と  $\beta$  の関係

第15図 1回の動揺後で同期引入れに成功する  $k_{crit}$  と  $\beta$  の関係第16図 1回の動揺後で同期引入れに成功する  $k_{crit}$  と  $\beta$  の関係



## 6. 結 言

以上の解析および実験より、明らかになったおもな点は次のとおりである。

1) 同期化するまでの動揺の回数を制限しないで、いつかは入るための諸定数間の関係が求められたとすれば、そのときの励磁投入後のリミットサイクルは鞍形点と鞍形点を通過している。そのリミットサイクルを1周期の間、フーリエ級数展開によって第4項まで近似し、各項の係数は位相面方程式から得られる5条件から決定した。その結果得られた近似リミットサイクルから逆に臨界の諸定数間の関係を求められることを示し、その得られた結果を第2図より第5図に示した。負荷比 $\beta$ が大なるところで厳密理論値との差異がでてくるのは、フーリエ級数展開の高調波の成分の取り方の影響と思われる。円筒形( $b=g=0$ )の場合は第2項まで近似し、臨界の相対制動係数 $k_{crit}$ を与える近似理論式を求めたが、これより得られた結果は厳密理論値とよく一致している。

2) 円筒形、突極形における臨界相対制動係数 $k_{crit}$ について、数値実験式より得られた値を第2図より第5図に示したが、種々のパラメーターに対し厳密理論値とよく一致している。

さらに、実験値はほぼ厳密理論値とあっており、位相面解析より得た厳密理論値の正当性を立証している。

3) 同期化するまでの動揺の回数を、ある任意の $n$ 回に定めた場合、誘導機としての定常状態のある初期位相角とそれに対応するすべりのとき励磁を入れた場合、界磁の時定数を無視すると、最も同期化しやすい最適位相角は $0$  [rad] であり、最悪位相角は $\pi$  [rad] であるということがわかった。これは従来それぞれ $0$  [rad] 付近、 $\pi$  [rad] 付近といわれていたものを、位相面の理論により厳密に証明したものである<sup>3)</sup>。

4) この結果を利用し、1回で入る臨界の諸定数間の関係をデジタル計算機により求め、その値を第3表と第13図より第16図までに示した。この場合、動揺の回数を制限しなかった場合の厳密理論値より必ず $k_{crit}$ の値が大になっている。このことは1回の動揺で同期化するためには、いつか同期化する場合と比べて負荷を常に図示の量だけ少なくしてやらなければならないことを意味する。

終りに、本研究は筆者の一人、武田郁夫が昭和42年度に内地研究員として、また昭和43年度7月より8月までの研修期間に静岡大学工学部電気工学科第二講座電気機械研究室において、三浦五郎教授の御指導のもとに行なったものであり、本研究の一部は昭和42年度電気4学会東海支部連合大会<sup>4),5)</sup>、昭和43年度電気4学会連合大会<sup>6)</sup>、昭和43年度電気4学会北海道支部連合大会<sup>7)</sup>で発表済みである。本研究に際し共に研究してきた大学院修士2年袴田宏君、実験および計算に協力して下さった昭和43年度電気工学科卒業生天方信久君、安川寿典君、電気工学科4年山田生実君、討論して載いた電気機械研究室助手佐藤和雄氏、電気機械研



究室の各位に心より感謝の意を表します。

## 文 献

- 1) 武田郁夫・三浦五郎：同期電動機の同期化現象に関する研究 (第1報)，昭和42年。
- 2) 三浦五郎・武田郁夫：同期電動機の同期化トルク (同期化条件の新関係式)，昭和41年度電気4学会東海支部連合大会講演論文集，p. 87。
- 3) H. E. Edgerton and P. Fourmarier: "The Pulling into Step of a Salient-Pole Synchronous Motor". T.A.I.E.E., 1931, p. 769.
- 4) 三浦五郎・武田郁夫・袴田 宏：“突極形同期電動機の同期化現象の解明”，昭和42年度電気4学会東海支部連合大会講演論文集，p. 291。
- 5) 三浦五郎・武田郁夫・袴田 宏：“位相面解析による突極同期電動機の同期化現象”，昭和42年度電気学会東海支部連合大会講演論文集，p. 292。
- 6) 三浦五郎・武田郁夫・袴田 宏：“突極形同期電動機の同期化現象の解明”，昭和43年度電気4学会連合大会講演論文集 [II]，p. 536。
- 7) 三浦五郎・武田郁夫・袴田 宏：“同期電動機の同期化時投入位相角の最適値および最悪値 (界磁の時定数を無視するとき)”，昭和43年度電気4学会北海道支部連合大会講演論文集，p. 45。