半順序線型空間に関するいくつかの実例について

磯 部 煕 郎

(昭和42年10月31日受理)

Some Examples in Semi-ordered Linear Spaces

by Kiro ISOBE

To every element a of semi-ordered linear space E there exist b and $c \in E^+$ such that $a=b-c$ and we define in [1] that

$$P_a = \{x:\ 0 \leqq x \leqq b \text{ for every } b,\ c \in E^+ \text{ and } a=b-c\}$$
$$N_a = P_{-a}.$$

We suppose in E the following postulates:

1) $P_a = \{0\}$ implies $a \leqq 0$,
2) $P_{a+b} \subset P_a + P_b \quad (a, b \in E)$.

We speak of such a semi-ordered linear space as semi-lattice ordered in [1].

In this report we give some examples which stand in relation to semi-lattice ordered linear spaces, which are as follows:

1. ex. of semi-lattice ordered linear space which is not lattice ordered,
2. ex. of semi-ordered linear space which is not semi-lattice ordered,
3. ex. of semi-lattice ordered linear space which is not Archimedean, etc.

ま え が き

線型東空間の表現については既に充分論じられているが（[1], [2] 参照），著者は，一般に**東**を仮定しない**半順序線型空間** E の要素 a に対し

$$P_a = \{x:\ 0 \leq x \leq b,\ a=b-c,\ b,\ c \in R^+\}$$
$$N_a = P_{-a}$$

なる集合を定義し，E に対し，つぎの条件

1) $P_a = \{0\}$ ならば $a \leq 0$

2) $P_{a+b} \subset P_a + P_b \quad (a, b \in E)$

を仮定し，この空間を**線型半東空間**と名づけた。線型半東空間 E が **Archimedean** ならば，ある **Compact Hausdorff** 空間上の C-空間の中に埋め込むことが可能である（[1] 参照)。この小論では，これらの理論に関係する空間について，いくつかの実例を考えることにする。

1. 束にならない半順序線型空間の例

開区間 (a, b) で一回微分可能な実関数の全体がつくる空間 E が束にならないことは直観的にすぐ考えられることであるが厳密な証明を与えてみる。

E が線型空間であることは明らかである。

$E \ni f, g$ に対し，$f(x) \leq g(x)$ $(a<x<b)$ であるとき $f \leq g$ と定義すれば，E はこの順序で半順序線型空間になる。以下 E が束空間にならないことを示す。

i) 一般に，$E \ni f, g$ に対し

$$h(x)=\max\{f(x), g(x)\} \quad (a<x<b)$$

とおくとき $h \in E$ とはならない。

例えば

$$f(x)=0, \quad g(x)=x-\frac{a+b}{2} \quad (a<x<b)$$

とおけば $f, g \in E$ であるが

$$h(x)=\max\{f(x), g(x)\}=\begin{cases} 0 & \left(a<x \leq \dfrac{a+b}{2}\right) \\ x-\dfrac{a+b}{2} & \left(\dfrac{a+b}{2}<x<b\right) \end{cases}$$

は $x=\dfrac{a+b}{2}$ で微分可能ではないから $h \notin E$ である。

ii) $f(x)$ $(a<x<b)$ が連続，$g \in E$, $f \leq g$ であって，適当な点 p $(a<p<b)$ に対して $f(p)<g(p)$ であるならば，$f \leq h \lneqq g$, $h \in E$ なる h が存在する。

何故ならば，$g(p)-f(p)=2k$ とし，適当な $\delta(>0)$ が存在して，$|x-p|<\delta$ ならば $g(p)-f(p)>k$ である。

$p-\delta=c$, $p+\delta=d$, $a<c<d<b$ となるようにできるから

$$h(x)=\begin{cases} g(x) \quad (a<x \leq c) \\ g(x)+\dfrac{k}{2}\left\{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{(x-c)\pi}{\delta}\right)-1\right\} \quad (c<x<d) \\ g(x) \quad (d \leq x<b) \end{cases}$$

とおくとき

$$-2 \leq \sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{(x-c)\pi}{\delta}\right)-1 \leq 0$$

であるから

$$-k \leq \frac{k}{2}\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{(x-c)\pi}{\delta}\right)-1\right\} \leq 0$$

である。$c<x<d$ においては

$$g(x)-h(x) \leq g(x)-\{g(x)-k\}=k$$

$$h(x)-f(x)=\{h(x)-g(x)\}+\{g(x)-f(x)\}>-k+k=0$$

より $h(x)\geq f(x)$ であり，$g(x)\gneqq h(x)$ は明らかである。また，

$$D_{-}h(c)=g'(c)$$

$$D_{+}h(c)=g'(c)+\frac{k}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{(c-c)\pi}{\delta}\right)\cdot\frac{\pi}{\delta}=g'(c)$$

$$D_{-}h(d)=g'(d)+\frac{k}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{d-c}{\delta}\pi\right)\cdot\frac{\pi}{\delta}=g'(d)$$

$$D_{+}h(d)=g'(d)$$

故に $h(x)\,(a<x<b)$ は微分可能であり，$h\in E$ である。

iii) $f, g\in E$ に対し

$$h(x)=\max\{f(x), g(x)\}\quad (a<x<b),$$

$$h\in E$$

ならば $f\smile g$ は存在しない。

何故ならば，$h(x)\,(a<x<b)$ は連続であり，$f, g\leq k\in E$ なる k をとれば，$h\lneqq k$ より $h(p)<k(p)$, $a<p<b$ なる点 p が存在する。したがって，$h\leq l\lneqq k$, $l\in E$ なる l が存在するから，$f\smile g$ は決して存在しない。

以上で E が束空間にならないことが示されたが，E が線型半束空間であることは明らかである。

2. 半束にならない半順序線型空間の例

2 個の実数の組 (a, b) の全体がつくる線型空間を E とし，$E\ni(a, b), (a', b')$ に対し $a=a'$, $b=b'$ 又は $a<a', b<b'$ が成り立つとき $(a, b)\leq(a', b')$ と定義する。この順序で E は半順序線型空間になるが，半束にはならない。何故ならば，$a>0$ なる a に対し，$(0, a)$ なる E の要素を考えるとき，(x, y) を $(0, a)$ よりも，$(0, 0)$ よりも大きいとすれば $x>0$, $y>a$ でなければならない。また，$x>0$, $y>a$ なる任意の x, y に対して (x, y) は $(0, a)$ よりも，$(0, 0)$ よりも大きいから $P_{(0,a)}=\{0\}$ である。しかるに $(0, a)\leq 0$ ではない。

3. 線型半束空間が Archimedean にならない例

2. におけると同様に，2 個の実数の組 (a, b) の全体がつくる線型空間を E とし，E の要素 (a, b) と (a', b') に対し，$a<a'$ であるか，または $a=a'$, $b\leq b'$ のとき $(a, b)\leq(a', b')$ と定義する。この順序で E は**全順序線型空間**（任意の 2 個の要素は比較可能である。）になる。したがって，E は束空間であり，勿論半束空間である（5. 附記を参照）。しかしながら E は Archimedean ではない。何故ならば，$a>0$ なる a に対し，

$$\frac{1}{n}(a, 0)>(0, 1)>0\quad (n=1, 2, \cdots)$$

より $\dfrac{1}{n}(a,0)\downarrow 0$ は成立しない。

4. $\boldsymbol{P_a \frown P_b = \{0\}}$, $\boldsymbol{a, b \geq 0}$ であっても $\boldsymbol{a \frown b = 0}$ が成り立たない例

3個の実数の組 (a,b,c) の全体がつくる線型空間を E とし，E の要素 (a,b,c) と (a',b',c') に対し，

i) $a=a',\ b=b',\ c=c'$

ii) $a\leq a',\ b<b',\ c<c'$

iii) $a<a',\ b\leq b',\ c<c'$

iv) $a<a',\ b<b',\ c\leq c'$

のいずれか一つが成りたつとき $(a,b,c)\leq(a',b',c')$ と定義する。今

$a=(1,1,0)$, $b=(1,0,1)$ は共に $0=(0,0,0)$ より大きいが，$c=(x,y,z)\leq a,b$ とすれば

$x\leq 1,\ y\leq 0,\ z\leq 0$

しかるにこのような c で $c\geq 0$ なるものは 0 だけである。したがって，$P_a \frown P_b=\{0\}$.

一方，$d=(-1,0,0)\leq a,b$ であるが d と 0 は比較できない。したがって $a\frown b=0$ は成りたたない。また E は明らかに線型半束空間にはならない。

5. 附　　記

i) 線型束空間は半束空間である。

何故ならば

$P_a=\{0\}$ とすれば，$a^+=a\smile 0\in P_a$ より $a^+=0$, $a=a^+-a^-=-a^-\leq 0$ である。

また $(a+b)^+\leq a^++b^+$ より $P_{a+b}\subset P_a+P_b$ が成りたつ。

ii) E が線型半束空間のとき $E^+\ni a,b$, $P_a\frown P_b=\{0\}$ ならば $a\frown b=0$ である。

何故ならば

$c\leq a,b$ とすれば $P_c\subset P_a\frown P_b=\{0\}$ より $P_c=\{0\}$, したがって $c\leq 0$, すなわち $a\frown b=0$ である。

iii) E が Archimedean のとき，線型半束空間になるか否かについてはまだよくわからない。

参 考 文 献

[1] K. Isobe and T. Higashiyama: On Representation of Semi-ordered Linear Spaces, Mem. Kitami Inst. Tech. Vol. 2, No. 1, 1967.

[2] H. Nakano: Modern Spectral Theory. Tokyo Math. Book Ser. II, 1950.

[3] I. Amemiya: A General Spectral Theory in Semi-ordered Linear Spaces. Jour. Fac. Sci. Univ. Hokkaido Ser. I, Vol. XII, No. 3, 1953.