

主げたのねじり剛性を考慮した斜角格子げたの 解析と電算による影響面の計算

菅 原 登

(昭和42年10月2日受理)

Analysis of the Skew Plane-Framed Structure (Kreuzwerk) Considering Torsional Rigidity of its Main Beams and Calculation of Influence Lines by a Digital Computer

by Noboru SUGAWARA

As for the structure of bridges in these days, there is some tendency to use the plane-framed structures considering the torsional rigidity of their main beams with thin-wall of a box section. However, there arise some cases of designing a skew plane-framed structure to be suitable for the conditions of the erection site.

Formerly H. Homberg obtained ingeniously the solutions of the plane-framed structures using the group-load (Lastgruppen) method. In this study, this group-load method is applied to the analysis of a skew plane-framed structure considering the torsional rigidity of its main beams, and the influence lines of the bending moments as well as the torsional ones are obtained by a digital computer.

The results are as follows:

- (1) This analysis indicates considerably smaller values of the bending moments than those without the torsional rigidity.
- (2) The position of the maximum bending moment is not always at the midspan of main beams. It is affected by the skew angle, the panel length, the spacing of main beams, and other factors.

1. ま え が き

交通網の整備にともなう最近の橋梁は、多様性に富んでいる。特に、主げたに薄肉箱断面形を採用して、主げたのねじり剛性を考慮した格子げた構造とする傾向がみられる。また、架設地点の状況によっては、その斜角格子げた橋として、設計しなければならない場合がしばしばある。

主げたのねじり剛性を考慮することは、曲げモーメントとせん断力の減少を意味することであり、合理的にして経済的な設計をすることができる。

さきに、Homberg は、組荷重を棒力学にとりいれて、複雑な格子げたを巧妙に解析した。筆者は、この組荷重を応用して、主げたのねじり剛性を考慮した斜角格子げたについて、解析

をし、あわせて、電子計算機による数値計算を行なうものである。

以下述べる方法によれば、主げたおよび横げたの本数が任意であるときの、直げた群を有する斜角格子げたに適用することができる。しかし、ここでは、ねじり剛性と曲げ剛性のある3本の主げたに、曲げ剛性のみのある3本の横げたが直交し、かつ、対称性を有する斜角格子げたについて、述べることとする。

2. 理 論

(1) ねじりについて

けたには垂直荷重およびねじり荷重が、同時に、あるいは、単独に作用することが多い。同時に載荷したときの応力は、単独に載荷したときの応力を求めて合成すればよい。

いま、けたにねじり荷重のみが作用した場合を考えると、一般には、曲げねじり変形を生ずるが、図-1のよう

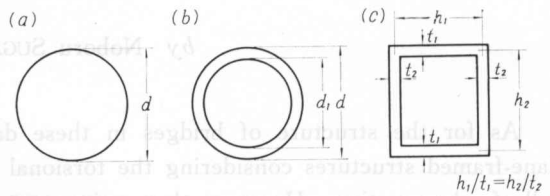


図-1

な、中実円形断面、中空円形断面および中空閉箱断面の場合には、単純ねじり変形を生ずる。したがって、これらの変形にともなう応力を求めなければならない。

i) 曲げねじりの場合

基礎微分方程式

$$\left. \begin{aligned}
 (EC_M \theta'')' - GJ_T \theta'' &= m_T \\
 M_T &= M_{TP} + M_{TS} = -EC_M \theta''' + GJ_T \theta' \\
 EC_M \theta'' - GJ_T \theta &= \int \left(\int m_T dx \right) dx + C_1 x + C_2 \\
 EC_M \theta'' - GJ_T \theta &= -M_w^0 \\
 M_w^0 &= GJ_T \text{ が } 0 \text{ の場合の曲げねじりモーメント}
 \end{aligned} \right\} (1)$$

媒介定数

$$\lambda = \sqrt{\frac{GJ_T}{EC_M}}, \quad \alpha = \frac{\lambda l}{2} \quad \left. \right\} (2)$$

一般解

$$\theta = A \sinh \lambda x + B \cosh \lambda x + \frac{1}{GJ_T} \left(M_w^0 + \frac{d^2 M_w^0}{\lambda^2 dx^2} \right) \quad \left. \right\} (3)$$

詳しくは、文献 [1], [4], [5] を参照

応 力

$$\sigma_2 = -EC_M \theta'' \cdot \frac{w}{C_M} = M_w \cdot \frac{w}{C_M}$$

$$\tau_2 = -EC_M \theta''' \cdot \frac{[F_w(S) - \Phi_w]}{t \cdot C_M} = M_{TS} \cdot \frac{[F_w(S) - \Phi_w]}{t \cdot C_M}$$

ここで、 $\Phi_w = \frac{\int F_w(S) \frac{dS}{t}}{\int \frac{dS}{t}}$ であり、開き断面の場合は $\Phi_w = 0$ である。

$M_{TP} = GJ_T \theta'$ に対しては

$$s\tau_1 = M_{TP} \cdot \frac{\frac{1}{3} \sum ht^3}{\frac{1}{3} \sum ht^3 + \int \frac{dS}{t}} \cdot \frac{t}{\frac{1}{3} \sum ht^3} \quad (4)$$

$$B\tau_1 = M_{TP} \cdot \frac{\frac{4F^2}{\int \frac{dS}{t}}}{\frac{1}{3} \sum ht^3 + \int \frac{dS}{t}} \cdot \frac{1}{2tF}$$

開き断面の場合は $\frac{4F^2}{\int \frac{dS}{t}} = 0$ である。

ii) 単純ねじりの場合

曲げねじりの場合の各式において、 $EC_M = 0$ とすることによって、それぞれに対応するものがえられる。

ここで、 $EC_M =$ 曲げねじり剛性 [kgcm⁴]、 $GJ_T =$ ねじり剛性 [kgcm²]、 $\theta =$ ねじり角 [radian]、 $m_T =$ 分布ねじりモーメント [kgcm⁻¹]、 $M_{TP} =$ 一次ねじりモーメント [kgcm]、 $M_{TS} =$ 二次ねじりモーメント [kgcm]、 $M_T =$ 全ねじりモーメント [kgcm]、 $w =$ そり座標 [cm]、 $M_w =$ 曲げねじりモーメント [kgcm²]、 $\sigma_2 =$ 曲げねじり軸応力 [kgcm⁻²]、 $F_w(S) =$ そり面積 [cm²]、 $S =$ 周長 [cm]、 $t =$ 板厚 [cm]、 $F =$ 閉じ断面全周長が囲む面積 [cm²]、 $\tau_2 =$ 曲げねじりせん断応力 [kgcm⁻²]、 $s\tau_1 = M_{TP}$ により生ずるせん断応力のうちで St. Venant の部分 [kgcm⁻²]、 $B\tau_1 = M_{TP}$ により生ずるせん断応力のうちで Bredt の部分 [kgcm⁻²] である。

要約すると、曲げねじり変形にともなう場合の応力は、軸応力としては、 M_w により生ずる曲げねじり軸応力 σ_2 、せん断応力としては、 M_{TS} により生ずる曲げねじりせん断応力 τ_2 と M_{TP} により生ずるせん断応力 $s\tau_1$ および $B\tau_1$ を加算することになる。また、単純ねじり変形にともなう場合の応力は、すべてがせん断応力であって、 $s\tau_1$ および $B\tau_1$ を加算すればよい。

(2) 解析の概要

図-2 のような、ねじり剛性と曲げ剛性のある主げたに、曲げ剛性のみのある横げたが直交

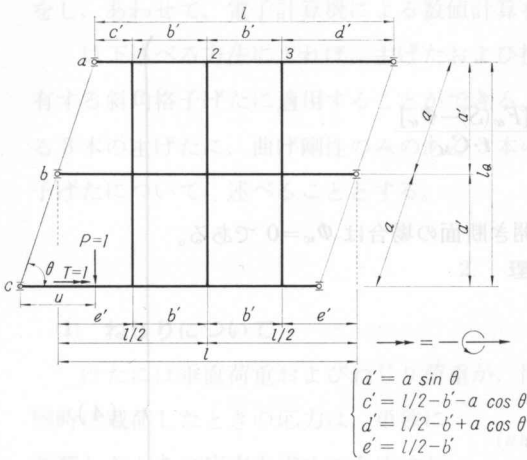


図-2

している斜角格子げたにおいて、支承条件として、各主げたは、曲げ変形に対しては両端単純支持、ねじり変形に対しては両端固定支持とする。また、主げたと横げたの連結条件として、それらは剛結であるとするとき、これは、内的12次の不静定構造である。

このとき、横げたは、主げたを弾性たわみとねじりを生じさせる支承上の連続げたとし、したがって、横げたに付加的な曲げモーメントが生ずることを考慮し、また、主げたは、横げたを固定支承上の連続げたと考え、この両者の理論を組み合わせて解析すればよい。

まず、各主げた間の横げた中央に切断点

を設けてこれを基本系とし、代わりに不静定力を挿入する。図-2の斜角格子げたは、対称性を有するから、組荷重を使用すると大変便利である。不静定組荷重としては、6通りの不静定組せん断力 $X_{(1)}=1, X_{(2)}=1, X_{(3)}=1, X_{(4)}=1, X_{(5)}=1, X_{(6)}=1$ および6通りの不静定組曲げモーメント $X_{(7)}=1, X_{(8)}=1, X_{(9)}=1, X_{(10)}=1, X_{(11)}=1, X_{(12)}=1$ を挿入する。これらの状態は図-3のとおりである。

斜角格子げたの上を、垂直荷重 $P=1$ およびねじりモーメント荷重 $T=1$ が、同時に作用して移動するときの不静定組荷重影響面は、12個の不静定組荷重を含む、12個の弾性方程式を連立的に解くことによって求められる。これをマトリックス表示して整理すれば式(5)のよ

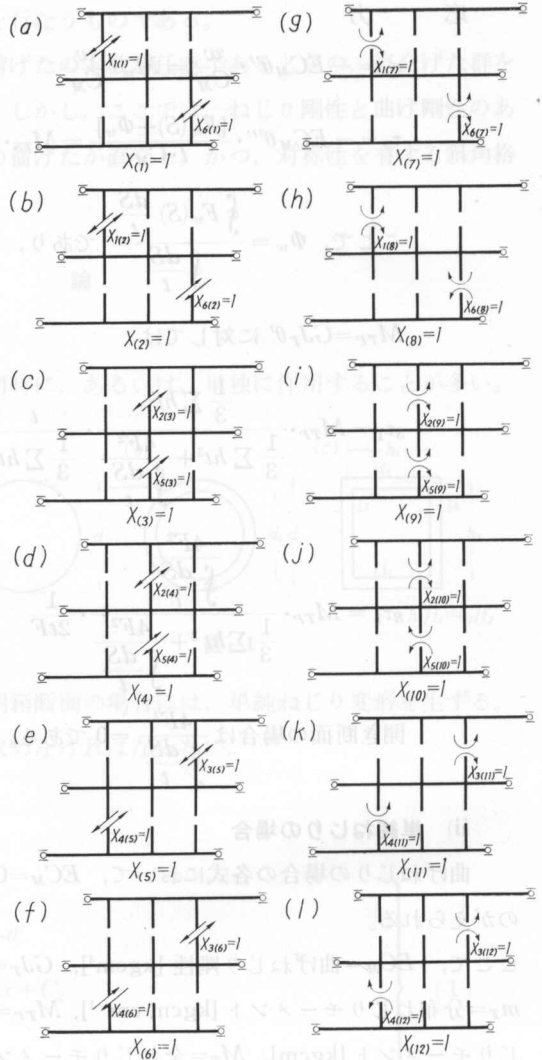


図-3

$$\begin{pmatrix} \delta_{(1)(1)} & \delta_{(1)(2)} & \dots & \delta_{(1)(12)} \\ \delta_{(2)(1)} & \delta_{(2)(2)} & \dots & \delta_{(2)(12)} \\ \delta_{(3)(1)} & \delta_{(3)(2)} & \dots & \delta_{(3)(12)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{(12)(1)} & \delta_{(12)(2)} & \dots & \delta_{(12)(12)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{(1)} \\ X_{(2)} \\ X_{(3)} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ X_{(12)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \delta_{(1)(0)} + \theta_{(1)(0)} \\ \delta_{(2)(0)} + \theta_{(2)(0)} \\ \delta_{(3)(0)} + \theta_{(3)(0)} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \delta_{(12)(0)} + \theta_{(12)(0)} \end{pmatrix} \quad (5)$$

うになる。

ここで、左辺の $\delta_{(m)(n)}$ は、基本系において、状態 $X_{(n)}=1$ の力と状態 $X_{(m)}=1$ による変形との間でなす仕事であって、不静定組荷重の係数は、すべて定数としてえられる。右辺は荷重項であって、 $\delta_{(m)(0)}$ および $\theta_{(m)(0)}$ は、基本系において、状態 $X_{(m)}=1$ による変形図 (垂直変位図およびねじり角変位図) そのものである。したがって、 $P=1, T=0$ のときの不静定組荷重影響面は、式(5)において、右辺の第二項 $\theta_{(m)(0)}=0$ として解けばよいことになり、 $„X_{(n)}”$ であらわす。同じようにして、 $T=1, P=0$ のときの不静定組荷重影響面は、式(5)において、右辺の第一項 $\delta_{(m)(0)}=0$ として解けばよいことになり、 $„X_{(n)}^{\rightarrow}”$ であらわす。

このようにして、不静定組荷重影響面が求められるから、任意の点 x における、垂直荷重 $P=1$ による断面力および変形等の影響面は式(6)により、あるいは、ねじりモーメント荷重 $T=1$ による断面力および変形等の影響面は式(7)により求めることができる。

$$„S_x” = „S_x^0” + \sum_{n=1}^{12} S_{x(n)} \cdot „X_{(n)}” \quad (6)$$

$$„S_x^{\rightarrow}” = „S_x^{0\rightarrow}” + \sum_{n=1}^{12} S_{x(n)} \cdot „X_{(n)}^{\rightarrow}” \quad (7)$$

ここで、 $„S_x^0”$ は、基本系の任意の点 x における、 $P=1$ による断面力および変形等の影響面であり、 $„S_x^{0\rightarrow}”$ は、基本系の任意の点 x における、 $T=1$ による断面力および変形等の影響面である。また、 $S_{x(n)}$ は、基本系において、 $X_{(n)}=1$ による断面力図および変形図等の点 x の値である。

(3) バネ係数

1本の主げたに、3本の切断された横げたが剛結されているとき、その横げたは、バネによって固定されていると考えることができる。したがって、横げたの自由端に垂直力 P が作用すると、バネには垂直力 P およびねじりモーメント $M_T = Pa'/2$ が作用することになる。垂直バネ係数を ω (単位は cm kg^{-1}) とすれば、垂直変位は $P\omega$ であり、ねじりバネ係数を ω_r (単位は $\text{radian kg}^{-1} \text{cm}^{-1}$) とすれば、ねじり角変位は $M_T\omega_r$ である。さらに、自由端には垂直変位 $\delta = Pa'^3/24EJ_0$ と撓み角 $i = Pa'^2/8EJ_0$ が生じている。これらの関係は図-4のとおりである。

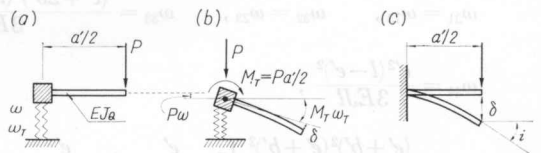


図-4

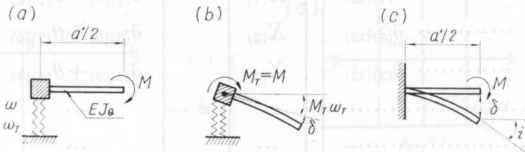


図-5

また、横げたの自由端に曲げモーメント M が作用すると、バネにはねじりモーメント $M_T = M$ のみが作用することになる。そして、ねじり角変位は $M_T \omega_T$ である。さらに、自由端には垂直変位 $\delta = Ma^2/8EJ_Q$ と撓み角 $i = Ma'/2EJ_Q$ が生じている。これらの関係は図-5のとおりである。

状態 $X_{(n)}=1$ による横げたの変形量を求めるには、バネ係数を用いると便利である。

図-6のように、横げたが剛結されている点 k に、垂直力 $P=1$ が作用したときの点 i における、垂直バネ係数を ω_{ik} とし、また、点 k に、ねじりモーメント $M_T=1$ が作用したときの点 i における、ねじりバネ係数を ω_{rik} とする。また、 EJ =主げたの曲げ剛性、 GJ_T =主げたのねじり剛性とすれば、相反作用の定理によって、 $\omega_{ik} = \omega_{ki}$ および $\omega_{rik} = \omega_{rki}$ がなりたつから、 ω_{ik} は式(8)のように、 ω_{rik} は式(9)のようにあらわされる。

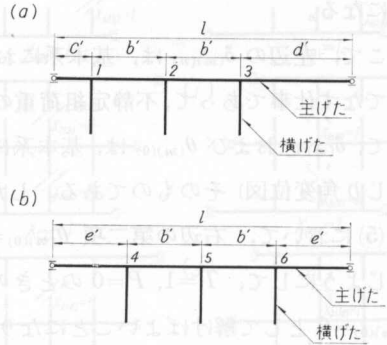


図-6

i) 垂直バネ係数

$$\left. \begin{aligned}
 \omega_{11} &= \frac{e'^2(l-c')^2}{3EJl}, \\
 \omega_{12} &= \frac{(c'+b')^2(l-c'-b')^2}{6EJl} \left\{ 2 \frac{c'}{(c'+b')} + \frac{c'}{(l-c'-b')} - \frac{c'^3}{(c'+b')^2(l-c'-b')} \right\}, \\
 \omega_{13} &= \frac{(c'+2b')^2(l-c'-2b')^2}{6EJl} \left\{ 2 \frac{c'}{(c'+2b')} + \frac{c'}{(l-c'-2b')} - \frac{c'^3}{(c'+2b')^2(l-c'-2b')} \right\}, \\
 \omega_{21} &= \omega_{12}, \quad \omega_{22} = \frac{(c'+b')^2(l-c'-b')^2}{3EJl}, \\
 \omega_{23} &= \frac{(c'+2b')^2(l-c'-2b')^2}{6EJl} \left\{ 2 \frac{(c'+b')}{(c'+2b')} + \frac{(c'+b')}{(l-c'-2b')} - \frac{(c'+b')^3}{(c'+2b')^2(l-c'-2b')} \right\}, \\
 \omega_{31} &= \omega_{13}, \quad \omega_{32} = \omega_{23}, \quad \omega_{33} = \frac{(c'+2b')^2(l-c'-2b')^2}{3EJl}, \\
 \omega_{44} &= \frac{e'^2(l-e')^2}{3EJl}, \\
 \omega_{45} &= \frac{(e'+b')^2(e'+b')^2}{6EJl} \left\{ 2 \frac{e'}{(e'+b')} + \frac{e'}{(e'+b')} - \frac{e'^3}{(e'+b')^2(e'+b')} \right\},
 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\omega_{46} = \frac{(e'+2b')^2(l-e'-2b')^2}{6EJl} \left\{ 2 \frac{e'}{(e'+2b')} + \frac{e'}{(l-e'-2b')} - \frac{e'^3}{(e'+2b')^2(l-e'-2b')} \right\},$$

$$\omega_{54} = \omega_{45}, \quad \omega_{55} = \frac{(e'+b')^2(e'+b')^2}{3EJl}, \quad \omega_{56} = \omega_{54}, \quad \omega_{64} = \omega_{46},$$

$$\omega_{65} = \omega_{45}, \quad \omega_{66} = \omega_{44}$$

ii) ねじりバネ係数

$$\omega_{T11} = \frac{c'(l-c')}{GJrl}, \quad \omega_{T12} = \frac{c'(b'+d')}{GJrl}, \quad \omega_{T13} = \frac{c'd'}{GJrl},$$

$$\omega_{T21} = \omega_{T12}, \quad \omega_{T22} = \frac{(c'+b')(l-c'-b')}{GJrl}, \quad \omega_{T23} = \frac{(c'+b')d'}{GJrl},$$

$$\omega_{T31} = \omega_{T13}, \quad \omega_{T32} = \omega_{T23}, \quad \omega_{T33} = \frac{(c'+2b')(l-c'-2b')}{GJrl},$$

$$\omega_{T44} = \frac{e'(l-e')}{GJrl}, \quad \omega_{T45} = \frac{e'(b'+e')}{GJrl}, \quad \omega_{T46} = \frac{e'e'}{GJrl}, \quad \omega_{T54} = \omega_{T45},$$

$$\omega_{T55} = \frac{(e'+b')(e'+b')}{GJrl}, \quad \omega_{T56} = \omega_{T54}, \quad \omega_{T64} = \omega_{T46}, \quad \omega_{T65} = \omega_{T45},$$

$$\omega_{T66} = \omega_{T44}$$

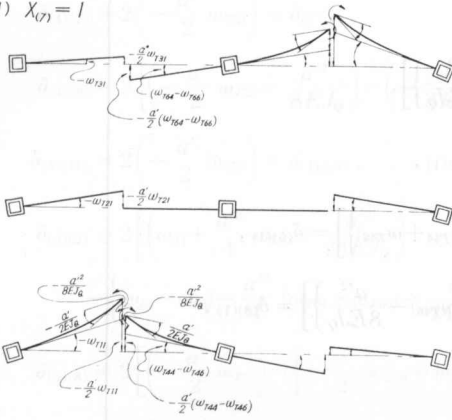
(4) 横げたの変形図

バネ係数を組み合わせて、状態 $X_{(n)}=1$ によるときのそれぞれの変形量を求めると、図-7 のようになる。

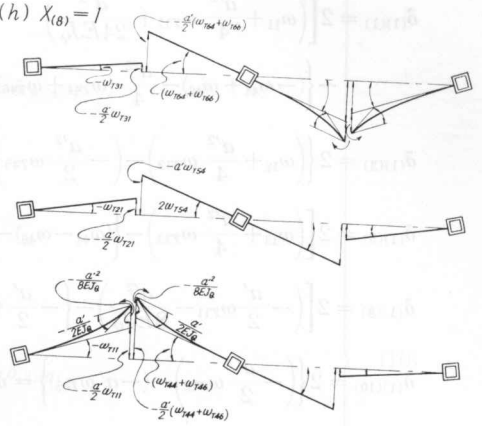
(5) 弾性方程式係数の計算

弾性方程式の係数の計算にあたって、垂直力は下向きを正、上向きを負、垂直変位は下向きを正、上向きを負とする。また、ねじりモーメントは時計方向を正、反時計方向を負、ねじり角は時計方向を正、反時計方向を負とすれば、相反作用の定理によって、 $\delta_{(m)(n)} = \delta_{(n)(m)}$ となりたつから、図-7を参照して $\delta_{(m)(n)}$ は式(10)のようになる。

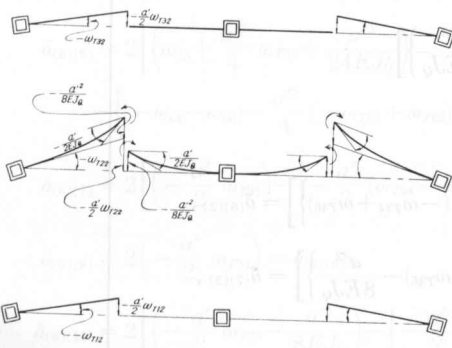
(g) $X_{(7)} = 1$



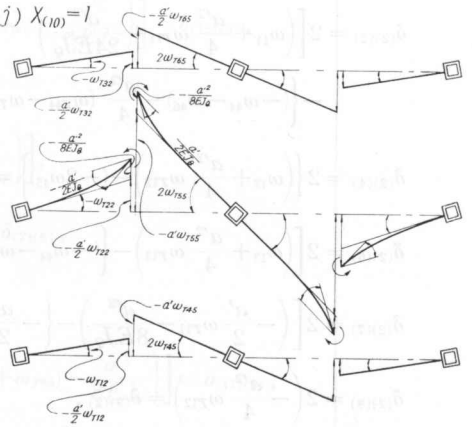
(h) $X_{(8)} = 1$



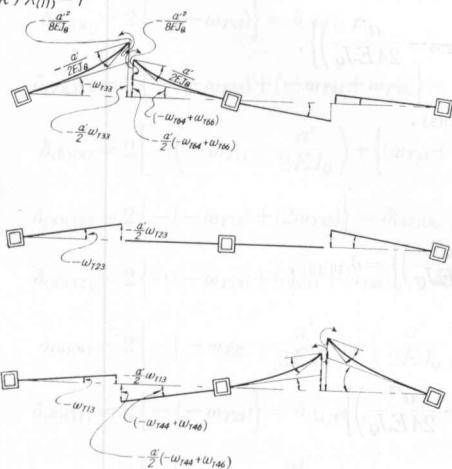
(i) $X_{(9)} = 1$



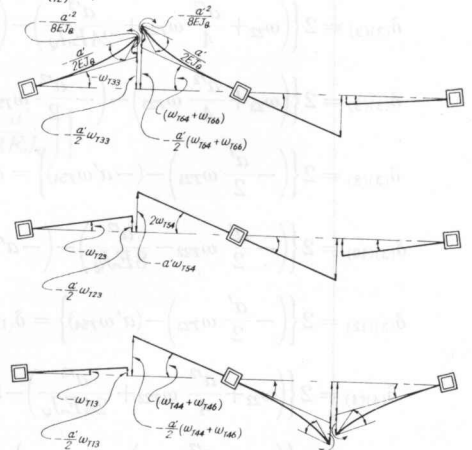
(j) $X_{(10)} = 1$



(k) $X_{(11)} = 1$



(l) $X_{(12)} = 1$



$$\begin{aligned} \delta_{(1)(1)} = & 2 \left[\left(\omega_{11} + \frac{a'^2}{4} \omega_{T11} + \frac{a'^3}{24EJ_Q} \right) \right. \\ & \left. - \left\{ (-\omega_{44} + \omega_{46}) - \frac{a'^2}{4} (\omega_{T44} + \omega_{T46}) - \frac{a'^3}{24EJ_Q} \right\} \right], \end{aligned}$$

$$\delta_{(1)(3)} = 2 \left\{ \left(\omega_{12} + \frac{a'^2}{4} \omega_{T12} \right) - \left(-\frac{a'^2}{2} \omega_{T45} \right) \right\} = \delta_{(3)(1)},$$

$$\delta_{(1)(5)} = 2 \left[\left(\omega_{13} + \frac{a'^2}{4} \omega_{T13} \right) - \left\{ (\omega_{44} - \omega_{46}) - \frac{a'^2}{4} (\omega_{T44} + \omega_{T46}) \right\} \right] = \delta_{(5)(1)},$$

$$\delta_{(1)(8)} = 2 \left[\left(-\frac{a'}{2} \omega_{T11} - \frac{a'^2}{8EJ_Q} \right) - \left\{ -\frac{a'}{2} (\omega_{T44} + \omega_{T46}) - \frac{a'^2}{8EJ_Q} \right\} \right] = \delta_{(8)(1)},$$

$$\delta_{(1)(10)} = 2 \left\{ \left(-\frac{a'}{2} \omega_{T12} \right) - \left(-a' \omega_{T45} \right) \right\} = \delta_{(10)(1)},$$

$$\delta_{(1)(12)} = 2 \left[\left(-\frac{a'}{2} \omega_{T13} \right) - \left\{ -\frac{a'^2}{2} (\omega_{T44} + \omega_{T46}) \right\} \right] = \delta_{(12)(1)},$$

$$\begin{aligned} \delta_{(2)(2)} = & 2 \left[\left(\omega_{11} + \frac{a'^2}{4} \omega_{T11} + \frac{a'^3}{24EJ_Q} \right) \right. \\ & \left. - \left\{ (-\omega_{44} - \omega_{46}) - \frac{a'^2}{4} (\omega_{T44} - \omega_{T46}) - \frac{a'^3}{24EJ_Q} \right\} \right], \end{aligned}$$

$$\delta_{(2)(4)} = 2 \left\{ \left(\omega_{12} + \frac{a'^2}{4} \omega_{T12} \right) - \left(-2\omega_{45} \right) \right\} = \delta_{(4)(2)},$$

$$\delta_{(2)(6)} = 2 \left[\left(\omega_{13} + \frac{a'^2}{4} \omega_{T13} \right) - \left\{ (-\omega_{44} - \omega_{46}) - \frac{a'^2}{4} (-\omega_{T44} + \omega_{T46}) \right\} \right] = \delta_{(6)(2)},$$

$$\delta_{(2)(7)} = 2 \left[\left(-\frac{a'}{2} \omega_{T11} - \frac{a'^2}{8EJ_Q} \right) - \left\{ -\frac{a'}{2} (\omega_{T44} - \omega_{T46}) - \frac{a'^2}{8EJ_Q} \right\} \right] = \delta_{(7)(2)},$$

$$\delta_{(2)(9)} = 2 \left(-\frac{a'^2}{4} \omega_{T12} \right) = \delta_{(9)(2)},$$

$$\delta_{(2)(11)} = 2 \left[\left(-\frac{a'}{2} \omega_{T13} \right) - \left\{ -\frac{a'}{2} (-\omega_{T44} + \omega_{T46}) \right\} \right] = \delta_{(11)(2)},$$

$$\delta_{(3)(3)} = 2 \left\{ \left(\omega_{22} + \frac{a'^2}{4} \omega_{T22} + \frac{a'^3}{24EJ_Q} \right) - \left(-\frac{a'^2}{2} \omega_{T55} - \frac{a'^3}{24EJ_Q} \right) \right\},$$

$$\delta_{(3)(5)} = 2 \left\{ \left(\omega_{23} + \frac{a'^2}{4} \omega_{T23} \right) - \left(-\frac{a'^2}{2} \omega_{T54} \right) \right\} = \delta_{(5)(3)},$$

$$\delta_{(3)(8)} = 2 \left\{ \left(-\frac{a'}{2} \omega_{T21} \right) - \left(-a' \omega_{T54} \right) \right\} = \delta_{(8)(3)},$$

$$\delta_{(3)(10)} = 2 \left\{ \left(-\frac{a'}{2} \omega_{T22} - \frac{a'^2}{8EJ_Q} \right) - \left(-a' \omega_{T55} - \frac{a'^2}{8EJ_Q} \right) \right\} = \delta_{(10)(3)},$$

$$\delta_{(3)(12)} = 2 \left\{ \left(-\frac{a'}{2} \omega_{T23} \right) - \left(a' \omega_{T54} \right) \right\} = \delta_{(12)(3)},$$

$$\delta_{(4)(4)} = 2 \left\{ \left(\omega_{22} + \frac{a'^2}{4} \omega_{T22} + \frac{a'^3}{24EJ_Q} \right) - \left(-2\omega_{55} - \frac{a'^3}{24EJ_Q} \right) \right\},$$

$$\delta_{(4)(6)} = 2 \left\{ \left(\omega_{23} + \frac{a'^2}{4} \omega_{T23} \right) - \left(-2\omega_{54} \right) \right\} = \delta_{(6)(4)},$$

$$\begin{aligned}
 \delta_{(4)(7)} &= 2 \left(-\frac{a'}{2} \omega_{T21} \right) = \delta_{(7)(4)}, \\
 \delta_{(4)(9)} &= 2 \left\{ \left(-\frac{a'}{2} \omega_{T22} - \frac{a'^2}{8EJ_Q} \right) - \left(-\frac{a'^2}{8EJ_Q} \right) \right\} = \delta_{(9)(4)}, \\
 \delta_{(4)(11)} &= 2 \left(-\frac{a'}{2} \omega_{T23} \right) = \delta_{(11)(4)}, \\
 \delta_{(5)(5)} &= 2 \left[\left(\omega_{33} + \frac{a'^2}{4} \omega_{T33} + \frac{a'^3}{24EJ_Q} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \left\{ (\omega_{64} - \omega_{66}) - \frac{a'^2}{4} (\omega_{T64} + \omega_{T66}) - \frac{a'^3}{24EJ_Q} \right\} \right], \\
 \delta_{(5)(8)} &= 2 \left[\left(-\frac{a'}{2} \omega_{T31} \right) - \left\{ -\frac{a'}{2} (\omega_{T64} + \omega_{T66}) \right\} \right] = \delta_{(8)(5)}, \\
 \delta_{(5)(10)} &= 2 \left\{ \left(-\frac{a'}{2} \omega_{T32} \right) - \left(-\frac{a'}{2} \omega_{T65} \right) \right\} = \delta_{(10)(5)}, \\
 \delta_{(5)(12)} &= 2 \left[\left(-\frac{a'}{2} \omega_{T33} - \frac{a'^2}{8EJ_Q} \right) - \left\{ -\frac{a'}{2} (\omega_{T64} + \omega_{T66}) - \frac{a'^2}{8EJ_Q} \right\} \right] = \delta_{(12)(5)}, \\
 \delta_{(6)(6)} &= 2 \left[\left(\omega_{33} + \frac{a'^2}{4} \omega_{T33} + \frac{a'^3}{24EJ_Q} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \left\{ (-\omega_{64} - \omega_{66}) - \frac{a'^2}{4} (-\omega_{T64} + \omega_{T66}) - \frac{a'^3}{24EJ_Q} \right\} \right], \\
 \delta_{(6)(7)} &= 2 \left[\left(-\frac{a'}{2} \omega_{T31} \right) - \left\{ -\frac{a'}{2} (\omega_{T64} - \omega_{T66}) \right\} \right] = \delta_{(7)(6)}, \\
 \delta_{(6)(9)} &= 2 \left(-\frac{a'}{2} \omega_{T32} \right) = \delta_{(9)(6)}, \\
 \delta_{(6)(11)} &= 2 \left[\left(-\frac{a'}{2} \omega_{T33} - \frac{a'^2}{8EJ_Q} \right) - \left\{ -\frac{a'}{2} (-\omega_{T64} + \omega_{T66}) - \frac{a'^2}{8EJ_Q} \right\} \right] = \delta_{(11)(6)}, \\
 \delta_{(7)(7)} &= 2 \left[-\left(-\omega_{T11} - \frac{a'}{2EJ_Q} \right) + \left\{ (\omega_{T44} - \omega_{T46}) + \frac{a'}{2EJ_Q} \right\} \right], \\
 \delta_{(7)(9)} &= 2 \left\{ -(-\omega_{T12}) \right\} = \delta_{(9)(7)}, \\
 \delta_{(7)(11)} &= 2 \left\{ -(-\omega_{T13}) + (-\omega_{T44} + \omega_{T46}) \right\} = \delta_{(11)(7)}, \\
 \delta_{(8)(8)} &= 2 \left[-\left(-\omega_{T11} - \frac{a'}{2EJ_Q} \right) + \left\{ (\omega_{T44} + \omega_{T46}) + \frac{a'}{2EJ_Q} \right\} \right], \\
 \delta_{(8)(10)} &= 2 \left\{ -(-\omega_{T12}) + (2\omega_{T45}) \right\} = \delta_{(10)(8)}, \\
 \delta_{(8)(12)} &= 2 \left\{ -(-\omega_{T13}) + (\omega_{T44} + \omega_{T46}) \right\} = \delta_{(12)(8)}, \\
 \delta_{(9)(9)} &= 2 \left\{ -\left(-\omega_{T22} - \frac{a'}{2EJ_Q} \right) + \left(\frac{a'}{2EJ_Q} \right) \right\}, \\
 \delta_{(9)(11)} &= 2 \left\{ -(-\omega_{T23}) \right\} = \delta_{(11)(9)}, \\
 \delta_{(10)(10)} &= 2 \left\{ -\left(-\omega_{T22} - \frac{a'}{2EJ_Q} \right) + \left(2\omega_{T55} + \frac{a'}{2EJ_Q} \right) \right\},
 \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_{(10)(12)} &= 2 \left\{ -(-\omega_{T23}) + (2\omega_{T54}) \right\} = \bar{\delta}_{(12)(10)}, \\ \bar{\delta}_{(11)(11)} &= 2 \left[-\left(-\omega_{T33} - \frac{a'}{2EJ_Q}\right) + \left\{(-\omega_{T64} + \omega_{T66}) + \frac{a'}{2EJ_Q}\right\} \right], \\ \bar{\delta}_{(12)(12)} &= 2 \left[-\left(-\omega_{T33} - \frac{a'}{2EJ_Q}\right) + \left\{(\omega_{T64} + \omega_{T66}) + \frac{a'}{2EJ_Q}\right\} \right], \\ \bar{\delta}_{(1)(2)} &= \bar{\delta}_{(2)(1)} = 0, & \bar{\delta}_{(1)(4)} &= \bar{\delta}_{(4)(1)} = 0, & \bar{\delta}_{(1)(6)} &= \bar{\delta}_{(6)(1)} = 0, \\ \bar{\delta}_{(1)(7)} &= \bar{\delta}_{(7)(1)} = 0, & \bar{\delta}_{(1)(9)} &= \bar{\delta}_{(9)(1)} = 0, & \bar{\delta}_{(1)(11)} &= \bar{\delta}_{(11)(1)} = 0, \\ \bar{\delta}_{(2)(3)} &= \bar{\delta}_{(3)(2)} = 0, & \bar{\delta}_{(2)(5)} &= \bar{\delta}_{(5)(2)} = 0, & \bar{\delta}_{(2)(8)} &= \bar{\delta}_{(8)(2)} = 0, \\ \bar{\delta}_{(2)(10)} &= \bar{\delta}_{(10)(2)} = 0, & \bar{\delta}_{(2)(12)} &= \bar{\delta}_{(12)(2)} = 0, & \bar{\delta}_{(3)(4)} &= \bar{\delta}_{(4)(3)} = 0, \\ \bar{\delta}_{(3)(6)} &= \bar{\delta}_{(6)(3)} = 0, & \bar{\delta}_{(3)(7)} &= \bar{\delta}_{(7)(3)} = 0, & \bar{\delta}_{(3)(9)} &= \bar{\delta}_{(9)(3)} = 0, \\ \bar{\delta}_{(3)(11)} &= \bar{\delta}_{(11)(3)} = 0, & \bar{\delta}_{(4)(5)} &= \bar{\delta}_{(5)(4)} = 0, & \bar{\delta}_{(4)(8)} &= \bar{\delta}_{(8)(4)} = 0, \\ \bar{\delta}_{(4)(10)} &= \bar{\delta}_{(10)(4)} = 0, & \bar{\delta}_{(4)(12)} &= \bar{\delta}_{(12)(4)} = 0, & \bar{\delta}_{(5)(6)} &= \bar{\delta}_{(6)(5)} = 0, \\ \bar{\delta}_{(5)(7)} &= \bar{\delta}_{(7)(5)} = 0, & \bar{\delta}_{(5)(9)} &= \bar{\delta}_{(9)(5)} = 0, & \bar{\delta}_{(5)(11)} &= \bar{\delta}_{(11)(5)} = 0, \\ \bar{\delta}_{(6)(8)} &= \bar{\delta}_{(8)(6)} = 0, & \bar{\delta}_{(6)(10)} &= \bar{\delta}_{(10)(6)} = 0, & \bar{\delta}_{(6)(12)} &= \bar{\delta}_{(12)(6)} = 0, \\ \bar{\delta}_{(7)(8)} &= \bar{\delta}_{(8)(7)} = 0, & \bar{\delta}_{(7)(10)} &= \bar{\delta}_{(10)(7)} = 0, & \bar{\delta}_{(7)(12)} &= \bar{\delta}_{(12)(7)} = 0, \\ \bar{\delta}_{(8)(9)} &= \bar{\delta}_{(9)(8)} = 0, & \bar{\delta}_{(8)(11)} &= \bar{\delta}_{(11)(8)} = 0, & \bar{\delta}_{(9)(10)} &= \bar{\delta}_{(10)(9)} = 0, \\ \bar{\delta}_{(9)(12)} &= \bar{\delta}_{(12)(9)} = 0, & \bar{\delta}_{(10)(11)} &= \bar{\delta}_{(11)(10)} = 0, & \bar{\delta}_{(11)(12)} &= \bar{\delta}_{(12)(11)} = 0 \end{aligned}$$

結局、不静定力として、対称組荷重、あるいは、逆対称組荷重を用いると、式(10)において明らかなように、係数の半分は0となる。したがって、12元連立弾性方程式である式(5)は、整理すると、2組の6元連立弾性方程式となり、式(11)のようになる。

$$\left. \begin{aligned} & \begin{pmatrix} \bar{\delta}_{(1)(1)} & \bar{\delta}_{(1)(3)} & \bar{\delta}_{(1)(5)} & \bar{\delta}_{(1)(8)} & \bar{\delta}_{(1)(10)} & \bar{\delta}_{(1)(12)} \\ \bar{\delta}_{(3)(1)} & \bar{\delta}_{(3)(3)} & \bar{\delta}_{(3)(5)} & \bar{\delta}_{(3)(8)} & \bar{\delta}_{(3)(10)} & \bar{\delta}_{(3)(12)} \\ \bar{\delta}_{(5)(1)} & \bar{\delta}_{(5)(3)} & \bar{\delta}_{(5)(5)} & \bar{\delta}_{(5)(8)} & \bar{\delta}_{(5)(10)} & \bar{\delta}_{(5)(12)} \\ \bar{\delta}_{(8)(1)} & \bar{\delta}_{(8)(3)} & \bar{\delta}_{(8)(5)} & \bar{\delta}_{(8)(8)} & \bar{\delta}_{(8)(10)} & \bar{\delta}_{(8)(12)} \\ \bar{\delta}_{(10)(1)} & \bar{\delta}_{(10)(3)} & \bar{\delta}_{(10)(5)} & \bar{\delta}_{(10)(8)} & \bar{\delta}_{(10)(10)} & \bar{\delta}_{(10)(12)} \\ \bar{\delta}_{(12)(1)} & \bar{\delta}_{(12)(3)} & \bar{\delta}_{(12)(5)} & \bar{\delta}_{(12)(8)} & \bar{\delta}_{(12)(10)} & \bar{\delta}_{(12)(12)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{(1)} \\ X_{(3)} \\ X_{(5)} \\ X_{(8)} \\ X_{(10)} \\ X_{(12)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \bar{\delta}_{(1)(0)} + \theta_{(1)(0)} \\ \bar{\delta}_{(3)(0)} + \theta_{(3)(0)} \\ \bar{\delta}_{(5)(0)} + \theta_{(5)(0)} \\ \bar{\delta}_{(8)(0)} + \theta_{(8)(0)} \\ \bar{\delta}_{(10)(0)} + \theta_{(10)(0)} \\ \bar{\delta}_{(12)(0)} + \theta_{(12)(0)} \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} \bar{\delta}_{(2)(2)} & \bar{\delta}_{(2)(4)} & \bar{\delta}_{(2)(6)} & \bar{\delta}_{(2)(7)} & \bar{\delta}_{(2)(9)} & \bar{\delta}_{(2)(11)} \\ \bar{\delta}_{(4)(2)} & \bar{\delta}_{(4)(4)} & \bar{\delta}_{(4)(6)} & \bar{\delta}_{(4)(7)} & \bar{\delta}_{(4)(9)} & \bar{\delta}_{(4)(11)} \\ \bar{\delta}_{(6)(2)} & \bar{\delta}_{(6)(4)} & \bar{\delta}_{(6)(6)} & \bar{\delta}_{(4)(7)} & \bar{\delta}_{(6)(9)} & \bar{\delta}_{(6)(11)} \\ \bar{\delta}_{(7)(2)} & \bar{\delta}_{(7)(4)} & \bar{\delta}_{(7)(6)} & \bar{\delta}_{(7)(7)} & \bar{\delta}_{(7)(9)} & \bar{\delta}_{(7)(11)} \\ \bar{\delta}_{(9)(2)} & \bar{\delta}_{(9)(4)} & \bar{\delta}_{(9)(6)} & \bar{\delta}_{(9)(7)} & \bar{\delta}_{(9)(9)} & \bar{\delta}_{(9)(11)} \\ \bar{\delta}_{(11)(2)} & \bar{\delta}_{(11)(4)} & \bar{\delta}_{(11)(6)} & \bar{\delta}_{(11)(7)} & \bar{\delta}_{(11)(9)} & \bar{\delta}_{(11)(11)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{(2)} \\ X_{(4)} \\ X_{(6)} \\ X_{(7)} \\ X_{(9)} \\ X_{(11)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \bar{\delta}_{(2)(0)} + \theta_{(2)(0)} \\ \bar{\delta}_{(4)(0)} + \theta_{(4)(0)} \\ \bar{\delta}_{(6)(0)} + \theta_{(6)(0)} \\ \bar{\delta}_{(7)(0)} + \theta_{(7)(0)} \\ \bar{\delta}_{(9)(0)} + \theta_{(9)(0)} \\ \bar{\delta}_{(11)(0)} + \theta_{(11)(0)} \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

このことは、不静定次数が低い構造で電動計算機を使用する場合には、計算能率を一段と高めることになる。また、不静定次数が高い構造で電子計算機を使用する場合には、メモリーの制限があって、いくつか分割してプログラムを作成するようになるときに、大変有効である。

3. 計算例

模型げたについて、曲げモーメント影響面およびねじりモーメント影響面を求めたが、非常に多くの計算量を必要とするので、計算はすべて電子計算機を使用して行った。

(1) 模型げた

図-8のような、模型げたの断面諸値は、次のとおりである。(この場合は、曲げねじり抵抗 $C_M=0$ である)

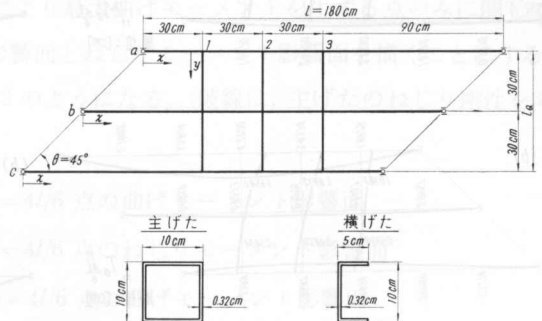


図-8

主げた断面二次モーメント

$$J = \frac{1}{12} (10 \times 10^3 - 9.36 \times 9.36^3) = 194 \quad [\text{cm}^4]$$

主げたねじり抵抗

$$J_T = \frac{1}{3} \sum ht^3 + \frac{4F^2}{\int \frac{dS}{t}} = \frac{1}{3} (2 \times 10 \times 0.32^3 + 2 \times 9.36 \times 0.32^3) + \frac{4 \times (9.68^2)^2}{2 \times \frac{10}{0.32} + 2 \times \frac{9.36}{0.32}}$$

$$= 291 \quad [\text{cm}^4]$$

横げた断面二次モーメント

$$J_Q = \frac{1}{2} \cdot J = \frac{1}{2} \times 194 = 97 \quad [\text{cm}^4]$$

鋼げた弾性係数 $E = 2.1 \times 10^6 \quad [\text{kg/cm}^2]$

鋼げたせん断弾性係数 $G = 0.81 \times 10^6 \quad [\text{kg/cm}^2]$

(2) 電子計算のためのプログラミング

計算にあたっては、北海道大学計算センターにおける、ALCON II (NEAC 2203 G コンパイラ) によった。そして、主げた支間長、主げた間隔、横げた間隔、斜角度および断面諸値等が、任意の場合に計算可能なプログラムを完成した。なお、不静定組荷重影響面を求めるときは、逆マトリックスによるプログラミングによった。ここでは、プログラムの記載を省略して、大要のフロー・チャートを示すと、図-9のようになる。

(3) 影響面

主げたについては6分割点、横げたについては各主げた間中央における、 $P=1$ が動くときの曲げモーメント影

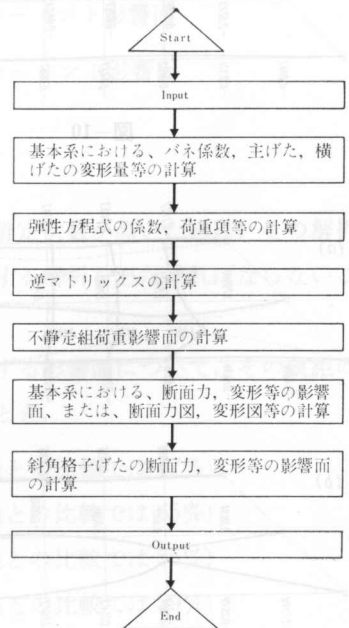


図-9

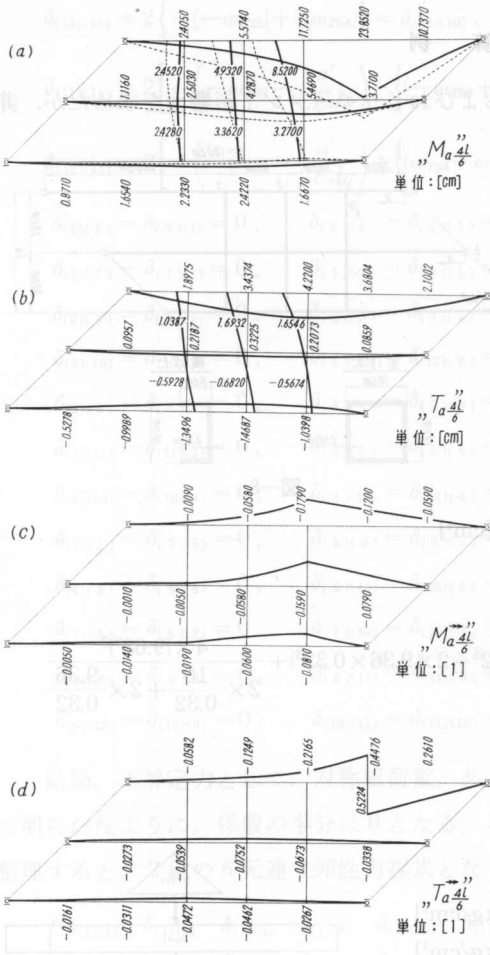


图-10

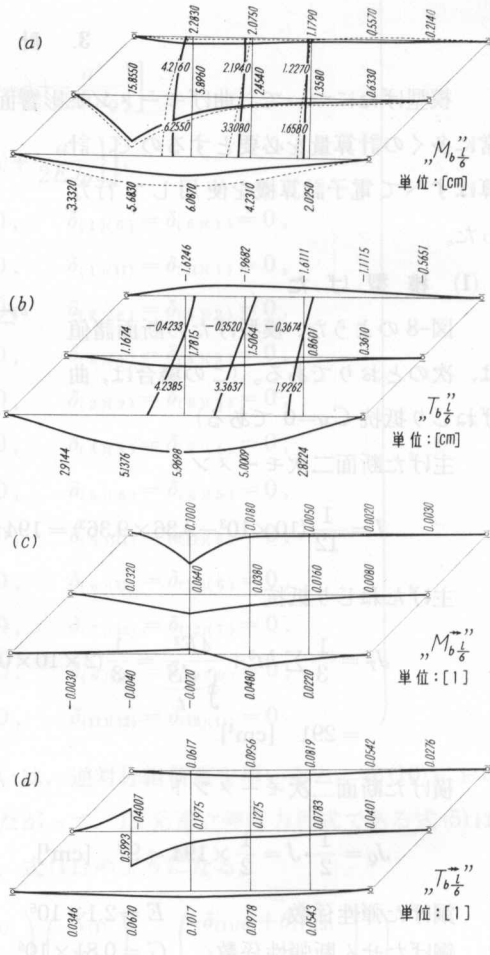


图-11

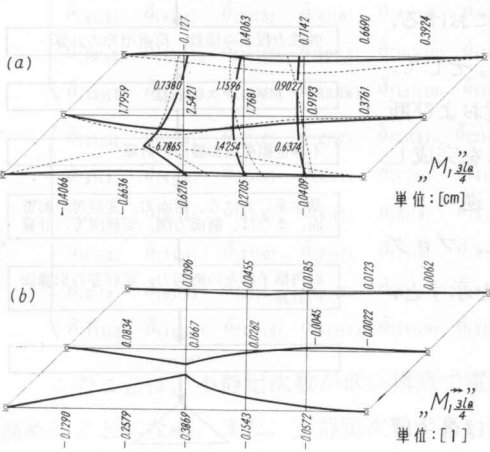


图-12

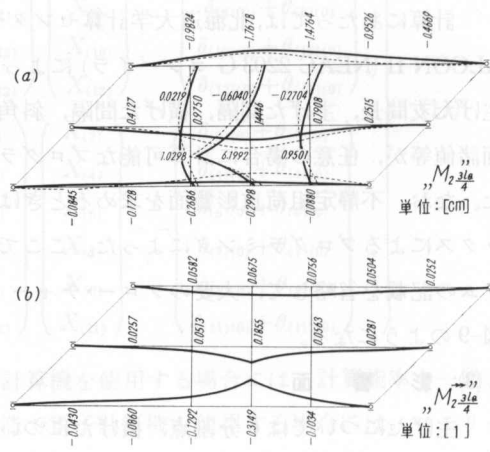


图-13

影響面およびねじりモーメント影響面を求め、次いで、 $T=1$ が動くときの曲げモーメント影響面およびねじりモーメント影響面を求めた。なお、別に、主げたのねじり剛性を考慮しない場合の影響面をも求めた。

いま、全計算の一部分として、 $P=1$ により最大曲げモーメントを生ずる点のみに関して、 $P=1$ および $T=1$ による曲げモーメント影響面とねじりモーメント影響面を描くことにする。これらは、図-10、図-11、図-12 および図-13 のようになる。(破線は、主げたのねじり剛性を考慮しないときの影響面)

„ $M_a \frac{4l}{6}$ ” : $P=1$ による主げた $a=4l/6$ 点の曲げモーメント影響面

„ $T_a \frac{4l}{6}$ ” : $P=1$ による主げた $a=4l/6$ 点のねじりモーメント影響面

„ $M_a \frac{4l}{6}$ ” : $T=1$ による主げた $a=4l/6$ 点の曲げモーメント影響面

„ $T_a \frac{4l}{6}$ ” : $T=1$ による主げた $a=4l/6$ 点のねじりモーメント影響面

„ $M_b \frac{l}{6}$ ” : $P=1$ による主げた $b=l/6$ 点の曲げモーメント影響面

„ $T_b \frac{l}{6}$ ” : $P=1$ による主げた $b=l/6$ 点のねじりモーメント影響面

„ $M_b \frac{l}{6}$ ” : $T=1$ による主げた $b=l/6$ 点の曲げモーメント影響面

„ $T_b \frac{l}{6}$ ” : $T=1$ による主げた $b=l/6$ 点のねじりモーメント影響面

„ $M_1 \frac{3l_Q}{4}$ ” : $P=1$ による横げた $1=3l_Q/4$ 点の曲げモーメント影響面

„ $T_1 \frac{3l_Q}{4}$ ” : $T=1$ による横げた $1=3l_Q/4$ 点の曲げモーメント影響面

„ $M_2 \frac{3l_Q}{4}$ ” : $P=1$ による横げた $2=3l_Q/4$ 点の曲げモーメント影響面

„ $T_2 \frac{3l_Q}{4}$ ” : $T=1$ による横げた $2=3l_Q/4$ 点の曲げモーメント影響面

4. あとがき

ねじり剛性を考慮した主げたをもつ斜角格子げたは、不静定次数が高いために、その解析が大変繁雑である。しかし、設計にあたっては、構造に適合する解析をしなければならないことは当然であって、大略次のことが言える。

(1) 垂直荷重 $P=1$ によって、最大曲げモーメントを生ずる影響面について、その縦距の最大値を、主げたのねじり剛性を考慮しない場合と比較するとき、

主げた a, c については 27% (格子作用のない構造との比較では 47%)

主げた b については 9% (格子作用のない構造との比較では 65%)

横げた 1, 3 については -7% (格子作用のない構造との比較では 55%)

横げた 2 については 16% (格子作用のない構造との比較では 59%)

曲げモーメントが減少する。このことは、主げたのねじり剛性を考慮すれば、かなり経済的で

あることを示している。

(2) 主げたの最大曲げモーメントを生ずる位置は、中央から支点側に寄っている。このことは、斜角度、主げた間隔および横げた間隔等、いわゆる、形状によって変りうるもので、特殊の形状のものでは、支点に近い位置に最大曲げモーメントを生ずることが予想される。図-8のような、模型げたの場合には、横げたの集中している近傍では荷重分配がよいので、集中している部分から離れた位置に、最大曲げモーメントが生ずると考えられる。

これらのことは、特定の図-8のような、模型げたについて計算した結果から言えることである。したがって、斜角格子げたの形状に関して、または、主げたと横げたの断面値の比等に関しての、荷重分配性状を知ることは、より合理的、より経済的な設計を可能にすると思われる。筆者は、この研究を進めることを予定している。なお、今回は実験をすることができなかったが、機会をあらためて実験を行ない、理論値と実験値を比較検討したいと考えている。

(土木学会北海道支部研究発表会にて一部発表，昭和42年2月22日，札幌)

参 考 文 献

- [1] 渡辺 昇：格子げたの理論と計算，技報堂，1965.
- [2] H. Homberg u. K. Trenks：Drehsteife Kreuzwerke，Springer，1962.
- [3] A. Hawranek u. O. Steinhardt：Theorie und Berechnung der Stahlbrüchen，Springer，1958.
- [4] H. Lindenberger：Vergleich und Analogiebetrachtung der Lösungen für biegebeanspruchte und verdrehungsbeanspruchte Stabwerke，Der Stahlbau 1953，Heft 1，S. 14.
- [5] F. W. Bornscheuer：Beispiel und Formelsammlung zur Spannungsberechnung dünnwandiger Stäbe mit wölbbehindertem Querschnitt，Der Stahlbau 1952，Heft 12，S. 225. 1953，Heft 2，S. 32.