

操作機が速度飽和特性を持つ場合の最短時間制御*

神谷 祐 二

小山 昭 一**

三浦 良 一**

(昭和42年10月30日受理)

Time Optimal Control with the Actuator Saturated in its Switching Velocity

By Yuzi KAMIYA, Shoichi KOYAMA and Ryoichi MIURA

It is well known that time optimal control of the linear system with the restricted magnitude of the control variable results in bang-bang control.

But, when the actuator has the characteristic of the switching velocity saturation, it cannot perform bang-bang control.

In this case, we must treat it as the system with the restricted state variable, considering U as a state and \dot{U} as a control variable.

Though time optimal control of such a system should be solved by application of the Maximum Principle with the restricted state variables, it is not applied to this kind of the problem yet, due to the difficulty of discussion on the jump condition of the auxiliary function and decision of the time when the phase point on the restricted plane leaves its plane.

This paper shows that by transforming the jump condition into the form in which the magnitude of the jump is not written explicitly, the jump condition can be applied easily and the time leaving the restricted plane can be obtained, and that time optimal control of the linear system with one control variable saturated in its switching velocity can be solved by application of the Maximum Principle.

1. 緒 言

操作量の大きさに制限のある場合の最適制御では、Bang-Bang型の制御となることが多い。しかし、実際の操作機でこの制御型を実現することはむずかしく、操作量を切替えるのにある一定の時間を必要とする、いわゆる操作機に速度飽和特性を持たせることが現実的である。

速度飽和を持つ系は操作量を状態変数と考え、操作機の切替速度を新たに操作量とすることにより、系の次数を1次元増して通常速度飽和のない系として取扱うことができる¹⁾。

* 昭和42年、電気四学会連合大会(昭42.4.30)で発表

** 北海道大学工学部

ただし、新しい状態変数の大きさには不等式の制限が付けられることになる。

一般に状態変数に制限のある系の最適制御問題を最大原理¹⁾の適用によって解く場合、軌道が制限面に達した時刻、及び制限面上から離れる時刻において、補助関数は飛躍条件を満足しなければならない。この条件を適用する際に飛躍量は先験的には求めることができず、更に制限面上に存在する軌道が制限面を離れる時刻を決定する方法が明らかでなく、問題の解決を困難にしている。

速度飽和特性の問題は状態変数に制限のある系としては比較的単純であると思われるが、最大原理の適用による一般的な解法は、まだ示されていない。船舶針路の最短時間制御問題はこの種の典型的な例題といえるが、この例題を河内等²⁾は操作機が速度飽和を持つという観点から Bang-Bang 制御の切換線の修正を行なって解いており、市川等³⁾は非線形要素を導入して、状態変数に制限のない系として解いている。いずれもその解法は一般性の点で問題がある。

本論文は n 次線形、1 操作量の系で操作機に速度飽和がある場合の最短時間制御問題に対して最大原理を適用し、その一般的な解法を示している。飛躍条件の適用、及び制限面を離れる時刻の決定は、飛躍条件の式を飛躍量が explicit に表われていない形に変形することによって解決されている。

2. 問題の記述

(1) 式で示される系において、(2) 式で示されるような操作機⁴⁾の速度飽和特性の下で位相点を任意の初期点から原点まで最短時間で移動させる問題を考える。

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}U, \quad |U| \leq 1 \quad (1)$$

ここで \mathbf{A} , \mathbf{b} はそれぞれ $n \times n$, $n \times 1$ の行列

$$|\dot{U}| \leq 1 \quad (2)$$

操作量 U を状態変数 x_{n+1} , \dot{U} を操作量 V とすることにより、(1) 式と (2) 式をまとめて (3) 式のように書くことができ、状態変数 x_{n+1} に制限のある系となる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}x_{n+1}(t) \\ \dot{x}_{n+1}(t) &= V, \quad |V| \leq 1 \\ |x_{n+1}(t)| &\leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

初期点, $x_1(0), \dots, x_n(0), x_{n+1}(0)$.
 終端点, $x_1(T) = \dots = x_{n+1}(T) = 0$,

ここで T は制御終了の時刻

以下において、 x_{n+1} を加えた $(n+1)$ 次元の位相点を

$$\underline{\mathbf{x}}(t) = \{x_1(t), \dots, x_n(t), x_{n+1}(t)\} = \{\mathbf{x}(t), x_{n+1}(t)\} \quad (4)$$

で表わし、 x_{n+1} に関する制限を

$$g(x_{n+1}) = |x_{n+1}| - 1 \leq 0 \tag{5}$$

で表わす。

3. 最適条件

(3) 式の系の最短時間制御を論ずる場合に、Pontryagin の示すところにしたがうと、位相

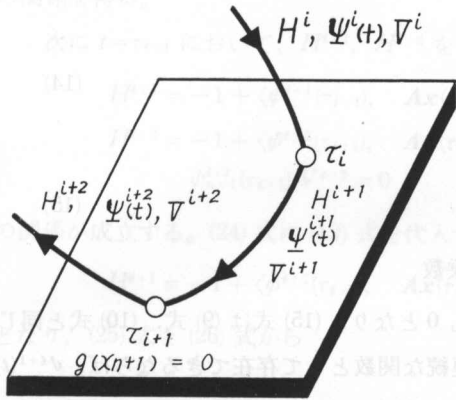


Fig. 1. Relations between trajectory and restricted plane.

点が $g(x_{n+1}) < 0$ なる制限面内に存在する場合と、 $g(x_{n+1}) = 0$ の制限面上に存在する場合とで適用する定理が異なる。すなわち、位相点の軌道と制限面とが Fig. 1 に示されるような関係にある時、位相点が制限面に達する時刻を τ_i 、制限面上を離れる時刻を τ_{i+1} とすると、 $t \leq \tau_i$ 、及び $\tau_{i+1} \leq t$ の期間の軌道に対しては通常定理を適用し、 $\tau_i \leq t \leq \tau_{i+1}$ の期間の軌道に対しては状態変数に制限がある場合の定理を適用しなければならない。以下において Fig. 1 に示されるように $t \leq \tau_i$ 、 $\tau_i \leq t \leq \tau_{i+1}$ 、 $\tau_{i+1} \leq t$ のそれぞれの期間の Hamiltonian、

補助関数、最適操作量を、 $H^i, H^{i+1}, H^{i+2}, \psi^i(t), \psi^{i+1}(t), \psi^{i+2}(t), V^i, V^{i+1}, V^{i+2}$ で表わす。ここで $\psi^i(t)$ は $x(t)$ に対応し

$$\psi^i(t) = \left\{ \psi_1(t), \dots, \psi_n(t), \psi_{n+1}(t) \right\} = \left\{ \psi(t), \psi_{n+1}(t) \right\} \tag{6}$$

である。

3.1 $t \leq \tau_i, \tau_{i+1} \leq t$ の期間の最適条件

Hamiltonian、及び補助関数の微分方程式は

$$H^i = -1 + \langle \psi^i(t), \mathbf{A}x(t) + \mathbf{b}x_{n+1}(t) \rangle + \psi_{n+1}^i(t)V \tag{7}$$

$$H^{i+2} = -1 + \langle \psi^{i+2}(t), \mathbf{A}x(t) + \mathbf{b}x_{n+1}(t) \rangle + \psi_{n+1}^{i+2}(t)V \tag{8}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\psi}^i(t) &= -\mathbf{A}'\psi^i(t) \\ \dot{\psi}_{n+1}^i(t) &= -\mathbf{b}'\psi^i(t) \end{aligned} \right\} \tag{9}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\psi}^{i+2}(t) &= -\mathbf{A}'\psi^{i+2}(t) \\ \dot{\psi}_{n+1}^{i+2}(t) &= -\mathbf{b}'\psi^{i+2}(t) \end{aligned} \right\} \tag{10}$$

となり、最適操作量はそれぞれ

$$V^i = \text{sgn } \psi_{n+1}^i(t) \tag{11}$$

$$V^{i+2} = \text{sgn } \psi_{n+1}^{i+2}(t) \tag{12}$$

で与えられ、Bang-Bang 制御となる。

3.2 $\tau_i \leq t \leq \tau_{i+1}$ の期間の最適条件

$P(\underline{\mathbf{x}}(t), V)$ なる関数を制限面の法線方向のベクトルと、位相点の速度ベクトルとの内積として定義すると (13) 式に示されるようになる

$$P(\underline{\mathbf{x}}(t), V) = \langle \partial g / \partial \underline{\mathbf{x}}, \dot{\underline{\mathbf{x}}}(t) \rangle = \pm V \quad (13)$$

位相点が $g(x_{n+1})=0$ の制限面上を進むことができるための必要十分条件は $P(\underline{\mathbf{x}}(t), V)=0$ と与えられ、(13) 式から

$$V = 0 \quad (14)$$

を得る。補助関数の微分方程式は

$$\left. \begin{aligned} \dot{\underline{\phi}}^{i+1}(t) &= -\mathbf{A}' \underline{\phi}^{i+1}(t) + \lambda \partial P / \partial \underline{\mathbf{x}} \\ \dot{\underline{\phi}}_{n+1}^{i+1} &= -\mathbf{b}' \underline{\phi}^{i+1}(t) + \lambda \partial P / \partial x_{n+1} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

ここで λ はラグランジエの未定乗数

と与えられるが、 $\partial P / \partial \underline{\mathbf{x}}$ 、及び $\partial P / \partial x_{n+1}$ はいずれも 0 となり、(15) 式は (9) 式、(10) 式と同じ形になる。したがって、 $\underline{\phi}^i(t)$ 、 $\underline{\phi}^{i+2}(t)$ が 0 でない連続な関数として存在できるならば、 $\underline{\phi}^{i+1}(t)$ も又 0 でない連続な関数として存在することができ、 $V^{i+1}=0$ なる操作量は位相点が制限面上に存在する時の最適操作量である。

3.3 補助関数の飛躍条件

Fig. 1 の $t=\tau_i$ 、 $t=\tau_{i+1}$ の時刻において、補助関数 $\underline{\phi}^i(t)$ 、 $\underline{\phi}^{i+1}(t)$ 、 $\underline{\phi}^{i+2}(t)$ は次の関係を満足しなければならない。

$$\underline{\phi}^{i+1}(\tau_i) = \underline{\phi}^i(\tau_i) + \mu_i \partial g / \partial \underline{\mathbf{x}} \quad (16)$$

$$\underline{\phi}^{i+2}(\tau_{i+1}) = \underline{\phi}^{i+1}(\tau_{i+1}) + \mu_{i+1} \partial g / \partial \underline{\mathbf{x}} \quad (17)$$

ここで μ_i 、 μ_{i+1} は定数

$g(x_{n+1})$ は x_{n+1} だけの関数であるから、(16) 式、(17) 式はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} \underline{\phi}^{i+1}(\tau_i) &= \underline{\phi}^i(\tau_i) \\ \underline{\phi}_{n+1}^{i+1}(\tau_i) &= \underline{\phi}_{n+1}^i(\tau_i) \pm \mu_i \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} \underline{\phi}^{i+2}(\tau_{i+1}) &= \underline{\phi}^{i+1}(\tau_{i+1}) \\ \underline{\phi}_{n+1}^{i+2}(\tau_{i+1}) &= \underline{\phi}_{n+1}^{i+1}(\tau_{i+1}) \pm \mu_{i+1} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

となり、 $(n+1)$ 成分にだけ μ_i 、又は μ_{i+1} なる飛躍が生ずることになる。しかしながら、これ等の飛躍量を先験的には求めることができず、(18) 式、及び (19) 式を μ_i 、 μ_{i+1} なる飛躍量が explicit に表われていない関係に変形する必要がある。

今 $t=\tau_i$ において Hamiltonian H^i 、 H^{i+1} を求めると

$$H^i = -1 + \langle \underline{\phi}^i(\tau_i), \mathbf{A} \underline{\mathbf{x}}(\tau_i) + \mathbf{b} x_{n+1}(\tau_i) \rangle + \underline{\phi}_{n+1}^i(\tau_i) V^i = 0 \quad (20)$$

$$\begin{aligned} H^{i+1} &= -1 + \langle \underline{\phi}^{i+1}(\tau_i), \mathbf{A} \underline{\mathbf{x}}(\tau_i) + \mathbf{b} x_{n+1}(\tau_i) \rangle + \underline{\phi}_{n+1}^{i+1}(\tau_i) V^{i+1} \\ &= -1 + \langle \underline{\phi}^{i+1}(\tau_i), \mathbf{A} \underline{\mathbf{x}}(\tau_i) + \mathbf{b} x_{n+1}(\tau_i) \rangle = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

となる。(21) 式に (18) 式を代入すると

$$H^{\ell+1} = -1 + \langle \psi^{\ell}(\tau_{\ell}), \mathbf{Ax}(\tau_{\ell}) + \mathbf{b}x_{n+1}(\tau_{\ell}) \rangle = 0 \quad (22)$$

となり、(20) 式と (22) 式から

$$\psi_{n+1}^{\ell}(\tau_{\ell}) V^{\ell} = 0 \quad (23)$$

の関係を得る。

次に $t = \tau_{\ell+1}$ において、 $H^{\ell+1}$ 、 $H^{\ell+2}$ を求めると

$$H^{\ell+1} = -1 + \langle \psi^{\ell+1}(\tau_{\ell+1}), \mathbf{Ax}(\tau_{\ell+1}) + \mathbf{b}x_{n+1}(\tau_{\ell+1}) \rangle = 0 \quad (24)$$

$$H^{\ell+2} = -1 + \langle \psi^{\ell+2}(\tau_{\ell+1}), \mathbf{Ax}(\tau_{\ell+1}) + \mathbf{b}x_{n+1}(\tau_{\ell+1}) \rangle + \psi_{n+1}^{\ell+2}(\tau_{\ell+1}) V^{\ell+2} = 0 \quad (25)$$

の関係が成立する。(24) 式に (19) 式を代入すると

$$H^{\ell+1} = -1 + \langle \psi^{\ell+2}(\tau_{\ell+1}), \mathbf{Ax}(\tau_{\ell+1}) + \mathbf{b}x_{n+1}(\tau_{\ell+1}) \rangle = 0 \quad (26)$$

となり、(25) 式と (26) 式から

$$\psi_{n+1}^{\ell+2}(\tau_{\ell+1}) V^{\ell+2} = 0 \quad (27)$$

の関係を得る。(23) 式、及び (27) 式において V^{ℓ} 、 $V^{\ell+2}$ は $+1$ 、又は -1 の値となり、(23) 式、及び (27) 式からそれぞれ (28) 式、(29) 式の関係が導かれる。

$$\psi_{n+1}^{\ell}(\tau_{\ell}) = 0 \quad (28)$$

$$\psi_{n+1}^{\ell+2}(\tau_{\ell+1}) = 0 \quad (29)$$

逆に (28) 式、(29) 式からそれぞれ (18) 式、(19) 式の飛躍条件を導びくことができ、結局 (28) 式、(29) 式は τ_{ℓ} 、 $\tau_{\ell+1}$ における飛躍条件が成立するための必要十分条件となっている。

4. 最適解

一般に状態変数に制限のない n 次線形系における最短時間制御は、高々 $(n-1)$ 回の切換を要する Bang-Bang 制御型となることが知られている¹⁾。したがって、(3) 式の系で $|x_{n+1}| \leq 1$ の制限がなければ高々 n 回の切換を要する Bang-Bang 制御型となるが、 x_{n+1} の制限のため $|x_{n+1}| = 1$ の時操作量は (14) 式から 0 となり、Fig. 2 に示されるような制御型となるのが最も複雑な場合である。軌道が制限面に達する時刻、及び離れる時刻を系の特性を考慮して Fig. 2 に示すように定める。

$0 \leq t \leq t_1$ 、 $t_2 \leq t \leq t_2 + 2$ 、 \dots 、 $t_{n-1} \leq t \leq T$ の各期間に対応する補助関数は、(16) 式、(17) 式から各々異なるとしなければならず、それぞれ

$$\underline{\psi}^1(t), \underline{\psi}^2(t), \dots, \underline{\psi}^{n+1}(t)$$

とする。(18) 式、(19) 式からこの場合

$$\psi^1(t) = \psi^2(t) = \dots = \psi^{n+1}(t)$$

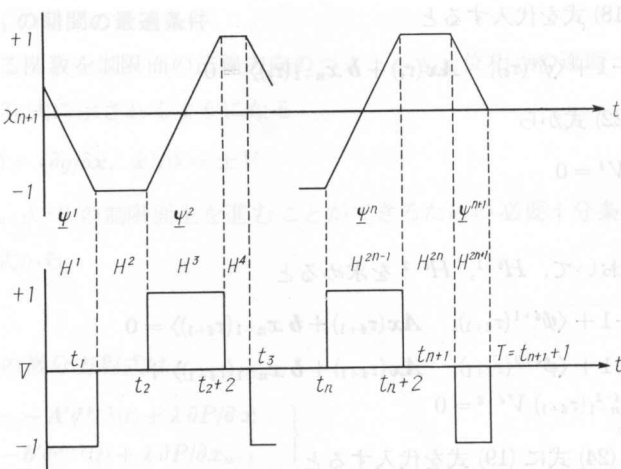


Fig. 2. Time optimal control sequence with saturated actuator.

となり

$$\psi_{n+1}^1(t), \psi_{n+2}^2(t), \dots, \psi_{n+1}^{n+1}(t)$$

だけが各期間で異なる。したがって、補助関数の初期値として

$$\phi(0) = \left\{ \phi_1(0), \phi_2(0), \dots, \phi_n(0) \right\}$$

$$\phi_{n+1}^1(0), \phi_{n+1}^2(0), \dots, \phi_{n+1}^{n+1}(0)$$

の計 $(2n+1)$ 個を求めればよい。

今これら $(2n+1)$ 個の初期値を与えると、(28)式と(29)式から $\phi_{n+1}^k(t)$ に対応する軌道が制限面を離れる時刻、及び次の制限面に達する時刻は $\phi_{n+1}^k(t)=0$ から得られ、又この期間の最適操作量は、 $V = \text{sgn } \phi_{n+1}^k(t)$ として決定される。したがって、 $(2n+1)$ 個の初期値と一義的に対応した軌道を得ることができる。

初期値は一般に解析的に求めることができるが、次数の高い時は S. J. Kahne による二点境界値問題の数値解法⁴⁾を適用することにより、 $(2n+1)$ 個の初期値を繰返し計算によって求めるのが有理である。

4.1 繰返し計算による補助関数の初期値の決定

位相点の終端点を

$$\underline{x}(T) = \left\{ \hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \dots, \hat{\xi}_{n+1} \right\}, \tag{30}$$

補助関数の初期値を

$$\begin{aligned} & \left\{ \phi_1(0), \dots, \phi_n(0), \phi_{n+1}^1(0), \dots, \phi_{n+1}^{n+1}(0) \right\} \\ & = \left\{ \eta_1, \dots, \eta_n, \eta_{n+1}, \dots, \eta_{2n+1} \right\} \end{aligned} \tag{31}$$

とする。今補助関数の初期値、及び制御終了時刻を与えると、位相点の終端を求めることができる。したがって、一般に $\{\eta_1, \dots, \eta_{2n+1}\}$, T は $\{\xi_1, \dots, \xi_{n+1}\}$ の関数として (32) 式のように表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} \eta_i &= F_i(\xi_1, \dots, \xi_{n+1}), \quad i = 1, 2, \dots, 2n+1 \\ T &= F_{2n+2}(\xi_1, \dots, \xi_{n+1}) \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

η_i, T に対し, $\eta_i^{(1)}, T^{(1)}$ なる推定値を与えるとこれらの推定値に対応して位相点の終端

$$\left\{ \xi_1^{(1)}, \dots, \xi_{n+1}^{(1)} \right\}$$

が決定され, $T^{(1)}$ と $\{\xi_1^{(1)}, \dots, \xi_{n+1}^{(1)}\}$ の間においても (32) 式は成立する。したがって

$$\left. \begin{aligned} \eta_i^{(1)} &= F_i(\xi_1^{(1)}, \dots, \xi_{n+1}^{(1)}) \\ T^{(1)} &= F_{2n+2}(\xi_1^{(1)}, \dots, \xi_{n+1}^{(1)}) \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

と書くことができる。

(33) 式の推定値を中心として, (32) 式をテーラー展開すると (34) 式となる。

$$\left. \begin{aligned} \eta_i &= \eta_i^{(1)} + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial F_i}{\partial \xi_j} (\xi_j - \xi_j^{(1)}) + \dots \\ T &= T^{(1)} + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial F_{2n+2}}{\partial \xi_j} (\xi_j - \xi_j^{(1)}) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

$\xi_j^{(1)} - \xi_j = \delta \xi_j^{(1)}$ として高次の項を無視すると, (34) 式は (35) 式となる。

$$\left. \begin{aligned} \eta_i^{(1)} &= \eta_i + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial F_i}{\partial \xi_j} \cdot \delta \xi_j^{(1)} \quad i = 1, \dots, n+1 \\ T^{(1)} &= T + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial F_{2n+2}}{\partial \xi_j} \cdot \delta \xi_j^{(1)} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

(35) 式の η_i, T は $\eta_i^{(1)}, T^{(1)}$ なる推定値よりも改善された近似値を与える。

η_i, T に対する $(n+2)$ 組の推定値

$$\left. \begin{aligned} \eta_1^{(1)}, \dots, \eta_{2n+1}^{(1)}, T^{(1)} \\ \vdots \\ \eta_1^{(n+2)}, \dots, \eta_{2n+1}^{(n+2)}, T^{(n+2)} \end{aligned} \right\}$$

を与える時, これらの推定値に対しても (35) 式と同様な関係が成立し

$$\left. \begin{aligned} \eta_i^{(k)} &= \eta_i + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial F_i}{\partial \xi_j} \cdot \delta \xi_j^{(k)} \\ T^{(k)} &= T + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial F_{2n+2}}{\partial \xi_j} \cdot \delta \xi_j^{(k)} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

と書くことができる。(36) 式を行列の形で表わすと (37) 式となる。

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & \delta \xi_1^{(1)} & \dots & \delta \xi_{n+1}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \delta \xi_1^{(n+2)} & \dots & \delta \xi_{n+1}^{(n+2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 & \dots & \eta_{2n+1} & T \\ \frac{\partial F_1}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial F_{2n+1}}{\partial \xi_1} & \frac{\partial F_{2n+2}}{\partial \xi_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_1}{\partial \xi_{n+1}} & \dots & \frac{\partial F_{2n+1}}{\partial \xi_{n+1}} & \frac{\partial F_{2n+2}}{\partial \xi_{n+1}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \eta_1^{(1)} & \dots & \eta_{2n+1}^{(1)} & T^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \eta_1^{(n+2)} & \dots & \eta_{2n+1}^{(n+2)} & T^{(n+2)} \end{pmatrix} \quad (37) \end{aligned}$$

(37) 式において、 $(n+2)$ 組の推定値に対応して、 $\eta_1, \dots, \eta_{2n+1}, T$ の値を求めることができ、これらの値は $(n+2)$ 組の推定値のどの組よりも改善された推定値を与える。

推定値 $(\eta_1^{(k)}, \dots, \eta_{2n+1}^{(k)}, T^{(k)})$ の組に対応する位相点の終端の誤差を

$$E_k = \sum_{\ell=1}^{n+1} |\delta \xi_{\ell}^{(k)}| \tag{38}$$

で表わし、 $k=1, \dots, n+2$ の中での最大誤差を E_m とする。すなわち、第 m 組の推定値 $(\eta_1^{(m)}, \dots, \eta_{2n+1}^{(m)}, T^{(m)})$ の近似度が最も悪かったとする。次の段階において (37) 式で求めた $(\eta_1, \dots, \eta_{2n+1}, T)$ 、及び $(\delta \xi_1, \dots, \delta \xi_{n+1})$ を $(\eta_1^{(m)}, \dots, \eta_{2n+1}^{(m)}, T)$ 、及び $(\delta \xi_1^{(m)}, \dots, \delta \xi_{n+1}^{(m)})$ と置き換え、再び (37) 式を解いて次の改善された値を求める。このような操作を繰返し、位相点の終端の誤差があらかじめ指定した範囲内に入れば、そこで計算を終了する。

4.2 補助関数の初期値の解析的決定

補助関数の初期値を解析的に求める場合、Fig. 2 における t_1, t_2, \dots, t_{n+1} も未知数となり、結局、求めるべき値は合計 $(3n+2)$ 個となる。これに対して方程式は各期間の軌道に対応する Hamiltonian が 0 になること、すなわち Fig. 2 において

$$H^1 = H^2 = \dots = H^{2n+1} = 0$$

であることから $(2n+1)$ 本、制御終了時刻 $t_{n+1}+1=T$ で位相点が原点に達すること、すなわち

$$x_1(T) = x_2(T) = \dots = x_{n+1}(T) = 0$$

であることから $(n+1)$ 本、合計 $(3n+2)$ 本の方程式がそれぞれ独立に成立し、未知数はすべて求めることができる。

5. 船舶針路の最短時間制御

舵の角位置を操作量 U とし、基準化した座標をそれぞれ

x_1 : 船の角位置

x_2 : 船の角速度

とすると、制御対象の方程式は

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= U, \quad |U| \leq 1 \end{aligned} \right\} \tag{39}$$

となる。舵はその角位置を瞬時に面舵から取舵に、又はその逆に移動させることはできないから、操作量 U は速度飽和特性を持っている。

操作量 U を状態変数と考え、 $\dot{U} = V$ を新たに操作量とすることによって、(39) 式の系は

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3, \quad |x_3| \leq 1 \\ \dot{x}_3 &= V, \quad |V| \leq 1 \end{aligned} \right\} \tag{40}$$

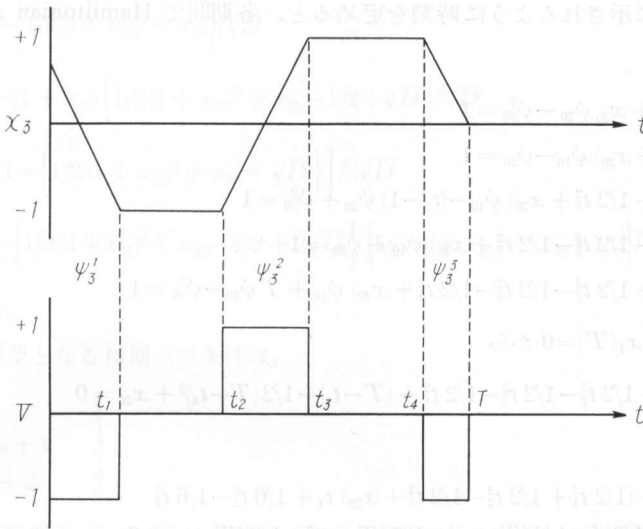


Fig. 3. An example of time optimal control sequences of system (40).

となる。したがって問題は、(40)式で表わされる系において、位相点を任意の初期点

$$(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (x_{10}, x_{20}, x_{30})$$

から終端点

$$(x_1(T), x_2(T), x_3(T)) = (0, 0, 0)$$

まで、最短時間で移動させる問題となる。

制御型が Fig. 3 に示されるようになる場合について、補助関数の初期値、軌道が制限面に達する時刻、及び制限面を離れる時刻を解析的に求めてみる。

この場合の補助関数としては $\psi_1, \psi_2, \psi_3^1, \psi_3^2, \psi_3^3$ を考えればよく、Hamiltonian は

$$H = -1 + \psi_1 x_2 + \psi_2 x_3 + \psi_3^i V \quad i = 1, 2, 3 \quad (41)$$

となる。補助関数の微分方程式は

$$\left. \begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= 0 \\ \dot{\psi}_2 &= -\psi_1 \\ \dot{\psi}_3^i &= -\psi_2, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

となり、初期値をそれぞれ、 $\psi_{10}, \psi_{20}, \psi_{30}^1, \psi_{30}^2, \psi_{30}^3$ とすると

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= \psi_{10} \\ \psi_2 &= -\psi_{10} t + \psi_{20} \\ \psi_3^1 &= 1/2 \psi_{10} t^2 - \psi_{20} t + \psi_{30}^1 \\ \psi_3^2 &= 1/2 \psi_{10} t^2 - \psi_{20} t + \psi_{30}^2 \\ \psi_3^3 &= 1/2 \psi_{10} t^2 - \psi_{20} t + \psi_{30}^3 \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

となる。Fig. 3 に示されるように時刻を定めると、各期間で Hamiltonian が 0 になることから

$$x_{20} \phi_{10} + x_{30} \phi_{20} - \phi_{30}^1 = 1 \quad (44)$$

$$(1/2 t_1^2 + x_{20}) \phi_{10} - \phi_{20} = 1 \quad (45)$$

$$(1/2 t_1^2 + 1/2 t_2^2 + x_{20}) \phi_{10} - (t_2 - 1) \phi_{20} + \phi_{30}^2 = 1 \quad (46)$$

$$(1/2 t_1^2 + 1/2 t_2^2 - 1/2 t_3^2 + x_{20}) \phi_{10} + \phi_{20} = 1 \quad (47)$$

$$(1/2 t_1^2 + 1/2 t_2^2 - 1/2 t_3^2 - 1/2 t_4^2 + x_{20}) \phi_{10} + T \phi_{20} - \phi_{30}^3 = 1 \quad (48)$$

の関係が成立し、 $x_1(T) = 0$ から

$$1/2 t_1^2 + 1/2 t_2^2 - 1/2 t_3^2 - 1/2 t_4^2 + (T - t_4) - 1/2 (T - t_4)^2 + x_{20} = 0 \quad (49)$$

$x_2(T) = 0$ から

$$1/2 t_4^2 + (1/2 t_1^2 + 1/2 t_2^2 - 1/2 t_3^2 + x_{20}) t_4 + 1/6 t_3^3 - 1/6 t_2^3 - 1/6 t_1^3 - 1/6 (T - t_4)^3 + 1/2 (T - t_4)^2 - 1/2 (T - t_4) = 0 \quad (50)$$

$x_3(T) = 0$ から

$$t_1 - x_{30} - 1 = 0 \quad (51)$$

の関係を得る。系の特性から

$$t_3 = t_2 + 2$$

$$T = t_4 + 1$$

となることを考慮して、(49) 式、(50) 式、(51) 式から t_2 、 t_4 を求めると

$$t_2 = 1/2 (1 + x_{30})^2 + x_{20} - 1 \pm \sqrt{D} \quad (52)$$

$$t_4 = 1/2 (1 + x_{30})^2 + x_{20} - 1/2 \pm 2\sqrt{D} \quad (53)$$

ここで

$$D = x_{10} + 1/2 \left\{ x_{20} + 1/2 (1 + x_{30})^2 \right\}^2 - 1/6 (1 + x_{30})^3 + 7/24 \quad (54)$$

となる。一方、(45) 式、(47) 式、及び (52) 式から ϕ_{10} を求めると

$$\phi_{10} = 1/\mp\sqrt{D} \quad (55)$$

となる。ところで Fig. 3 に示される制御型から $\phi_3^2(t)$ は上にとつでなければならず、 $\phi_{10} < 0$ である。したがって、(52) 式、(53) 式の根号前の符号は + でなければならず、軌道が制限面を離れる時刻、及び補助関数の初期値はそれぞれ

$$t_2 = 1/2 (1 + x_{30})^2 + x_{20} - 1 + \sqrt{D} \quad (56)$$

$$t_4 = 1/2 (1 + x_{30})^2 + x_{20} - 1/2 + 2\sqrt{D} \quad (57)$$

$$\phi_{10} = -1/\sqrt{D} \quad (58)$$

$$\phi_{20} = -\left\{1/2(1+x_{30})^2 + x_{20}\right\}/\sqrt{D} \tag{59}$$

$$\phi_{30}^1 = -(1+x_{30})\left\{1/2(1+x_{30})^2 + x_{20} - 1/2 + \sqrt{D}\right\}/\sqrt{D} \tag{60}$$

$$\phi_{30}^2 = \left[1 - \left\{1/2(1+x_{30})^2 + x_{20} + \sqrt{D}\right\}\right]/2\sqrt{D} \tag{61}$$

$$\phi_{30}^3 = -\left\{1/2(1+x_{30})^2 + x_{20} - 1/2 + 2\sqrt{D}\right\}\left\{1/2(1+x_{30})^2 + x_{20} + 1/2\right\}/2\sqrt{D} \tag{62}$$

として決定される。

Fig. 3 の制御型となる初期点の条件は

$$\left. \begin{aligned} D &\geq 0 \\ t_2 &\geq x_{30} + 1 \\ t_4 &\geq t_2 + 2 \end{aligned} \right\} \tag{63}$$

で与えられる。初期点 (2, 2, 0) は (63) 式の条件を満足しており、補助関数の初期値は (58) 式~(62) 式から、 $\phi_{10} = -0.44$, $\phi_{20} = -2.10$, $\phi_{30}^1 = -1.88$, $\phi_{30}^2 = -4.75$, $\phi_{30}^3 = -4.41$ となり、制限面に達する時刻、制限面を離れる時刻は、 $t_1 = 1.0$, $t_2 = 3.79$, $t_3 = 5.79$, $t_4 = 6.58$, $T = 7.58$ となる。この結果は河内等²⁾, 又は市川等³⁾ による方法で求めたものと一致する。 ψ_3^1 , ψ_3^2 , ψ_3^3 を同一座標面に描くと Fig. 4 のようになる。

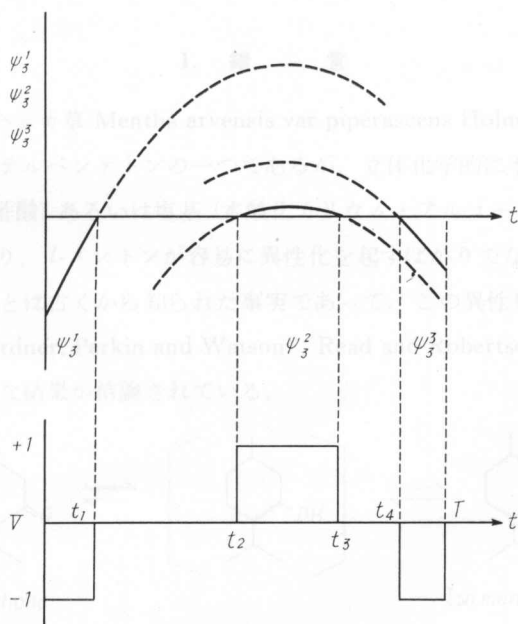


Fig. 4. Relations among $\psi_3^1(t)$, $\psi_3^2(t)$, $\psi_3^3(t)$ and V for $(x_{10}, x_{20}, x_{30}) = (2, 2, 0)$.

6. 結 言

操作機が速度飽和特性を持つ場合の最短時間制御に対して最大原理を適用する場合、その取扱が困難とされていた補助関数の飛躍条件、及び制限面上の軌道が制限面を離れる時刻の決定は、飛躍条件を飛躍量が explicit に表われていない形に変形することによって解決した。この結果、最適解は繰返し計算法を用いて得ることができ、又解析的にも解くことができることを示した。

本論文では解を時間の関数として表わす場合について記述したが、変形した飛躍条件を用いて逆時間解析を行なえば、最適操作量を状態変数の関数として求めることもできる。

おわりに御討論いただいた北海道大学工学部田川遼三郎教授に感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) Pontryagin and Others: The Mathematical Theory of Optimal Processes. John Wiley and Sons (1962).
- 2) 河内・小川・三浦: 操作機が飽和特性を持つ場合の最短時間制御問題. 第4回計測自動制御学会予稿集 (1965).
- 3) 市川・田村・披田: 船舶針路の最短時間制御. 第9回自動制御連合講演会予稿集 (1966).
- 4) Kahne, S. J.: Note on two-Point Boundary Value Problems. IEEE Trans. on AC. Vol. AC-8, No. 3 (1963).

