実二次形式の符号について

磯部熙郎
東山貞子*

(昭和41年10月31日受理)

Some Note on Real Quadratic Form

by Kiro ISOBE and Teiko HIGASHIYAMA

Abstract

Let $A(x,x)$ be a quadratic form (with real coefficient) which corresponds to the symmetric matrix $A=(a_{ij})$. Namely,

$$A(x,x)=\sum a_{ij}x_ix_j\,.$$

In this report, we assume that A is regular. The following theorem is well known: *$A(x,x)$ is positive definite form, if and only if, every principal minor of A is positive.*

We shall prove this theorem without taking up the Sylvester's low of inertia and signature of $A(x,x)$.

まえがき

行列 $A=(a_{ij})_{1)}$ を実数の n 次対称行列とし，n 個の実変数 $x_1,\cdots,x_n$ の二次同次多項式

$$A(x,x)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j \tag{1}$$

を**実二次形式**という．この小論では A を**正則**とし，よく知られている定理，すなわち，

$A(x,x)$ が正値形式となる必要十分条件は A の主小行列式の系 Δ_k $(k=1,\cdots,n)$

$$\Delta_k=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1k}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{k1}&\cdots&a_{kk}\end{vmatrix} \tag{2}$$

がすべて正である．

の証明について，**Sylvester の慣性率**，したがって，$A(x,x)$ の**符号定数**にふれることなく論じている．

1. 準備

はじめに準備として，よく知られている事ではあるが，**適当な正則行列 T が存在し，$T'AT_{2)}$**

---

* 小樽桜陽高等学校

1) 以下特にことわらないときは，つねに A を $A=(a_{ij})$ で表わし，n 次対称行列とする．

2) T' は T の転置行列

が対角線形になることを説明しょう.

1) $A\neq 0$, $A(x,x)$ を正値形式とすれば, $a_{pp}\neq 0$ なる p が少くとも一つ存在する.

(証明) $a_{ii}=0\ (i=1,\cdots,n)$ とすれば, $i\neq j$ なる任意の a_{ij} を一つとり, $x=(x_1,\cdots,x_n)$ を $x_k=0\ (k\neq i,j)$, $x_i=x_j=1$ とおくとき,

$$A(x,x)=2a_{ij}\geq 0,\quad a_{ij}\geq 0$$

また, $y=(y_1,\cdots,y_n)$ を $y_k=0\ (k\neq i,j)$, $y_i=1$, $y_j=-1$ とおくとき,

$$A(y,y)=-2a_{ij}\geq 0,\quad a_{ij}\leq 0$$

したがって, $a_{ij}=0$, $A=0$ となり仮定に反する.

2) A を n 次正方行列 (対称でなくてよい), p を $1\leq p\leq n$ なる自然数とするとき, 適当な正則行列 T が存在し, $T'AT=(x_{ij})$ とおけば, $x_{nn}=a_{pp}$ が成り立つ.

(証明) n 次正方行列 $T=(t_{ij})$ をつぎのように定めればよい.

p, n と異なる行については対角線上で1他は0, 第 p 行では $t_{pn}=1$, 他は0, 第 n 行では $t_{np}=1$ で他は0.

3) A において, $a_{nn}\neq 0$ とするとき, 適当な正則行列 T が存在し, $T'AT=(x_{ij})$ とおけば $x_{nj}=x_{jn}=0\ (j\neq n)$ が成り立つ.

(証明) n 次正方行列 $T=(t_{ij})$ をつぎのように定めればよい. すなわち, 第 n 行以外の行では, 対角線上で1, 他は0. 第 n 行では, $t_{nj}=-\dfrac{a_{nj}}{a_{nn}}\ (j\neq n)$, $t_{nn}=1$.

4) $A(x,x)$ を正値形式とするとき, 適当な正則行列 T が存在して, $T'AT$ は対角線形になる.

(証明) $A=0$ のときは明らかだから, $A\neq 0$ とし, A の次数 n に対して数学的帰納法を用いる.

$n=1$ のときは明らかである. $k-1$ 次まで成立を仮定し, $n=k$ とする. 1) より $a_{pp}\neq 0$ なる p が存在する. つぎに 2) により $P'AP$ の第 n 行第 n 列の要素が a_{pp} となる正則行列 P が存在する. したがって 3) より正則行列 Q が存在し, $Q'P'APQ=(x_{ij})$ とおけば, $x_{nj}=x_{jn}=0\ (j\neq n)$ が成りたつ.[1] 今 $k-1$ 次正方行列 $B=(b_{ij})$ を $b_{ij}=x_{ij}$ として定める. このとき, 帰納法の仮定より $k-1$ 次正則行列 $R=(r_{ij})$ が存在し, $R'BR$ は対角線形となる.[2] つぎに, n 次正方行列 $S=(s_{ij})$ を $i\neq n$ のときは $s_{ij}=r_{ij}\ (j\neq n)$. $s_{in}=0$, $s_{nj}=0\ (j\neq n)$, $s_{nn}=1$ として定めれば, S は正則行列である. 最後に $T=PQS$ とおくとき T は正則行列であり, $T'AT$ は対角線形になる.

2. $A(x,x)$ の符号について

5) $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, $A(x,\ x)$ は正値形式, $a=0$ または $c=0$ とすれば, $b=0$ である.

---

1) $P'AP$ は対称行列である.

2) B は対称行列で, かつ $B(x,x)$ は正値形式となる. [4] p. 12 参照.

（証明） $a=0$ として証明する（$c=0$ としても同様）．

$$A(x,x)=x_1(2bx_1+cx_2)\geqq 0$$

今 $b\neq 0$ とすれば $x_2=1$ として，$2bx_1+c<0$ となる x_1 が存在するから $b=0$ である．

6) $\boldsymbol{A}$ を正則，$\boldsymbol{A(x,x)}$ を正値形式とするとき $\boldsymbol{\Delta_k\neq 0\ (k=1,\cdots,n)}$ である．

（証明） A の次数 n について数学的帰納法を用いる．$n=1$ のときは明白．$k-1$ 次まで成立を仮定する．$n=k$ とし，

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots a_{1k-1} \\ \vdots & \\ a_{k-11} & \cdots a_{k-1k-1}\end{pmatrix}$$

とおけば，$B(x,x)$ は正値形式である.[1] したがって，$\Delta_k\neq 0$ のとき $\Delta_{k-1}\neq 0$ を示せばよい．4) より $k-1$ 次正則行列 $T=(t_{ij})$ が存在し，

$$T'BT=\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_{k-1}\end{pmatrix}$$

いま

$$S=(s_{ij})=\begin{pmatrix} t_{11} & \cdots t_{1k-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{k-11} & \cdots t_{k-1k-1} & 0 \\ 0 & \cdots\ \ 0 & 1\end{pmatrix}$$

とおくとき，S は正則行列であり，

$$S'AS=\begin{pmatrix} a_1 & 0 & b_1 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{k-1} & b_{k-1} \\ b_1 & \cdots b_{k-1} & b_k\end{pmatrix}$$

の形にかける．また $S'AS$ は正則である．一次変換

$$x_i=\sum_{j=1}^{n} s_{ij}X_j \quad (i=1,\cdots,k) \quad ((x)=S(X) \text{ と略記する．})$$

を考えるとき，$A(x,x)=S'AS(X,X)$ は正値形式である．もし，$a_l=0$ なる l があれば

$$C=\begin{pmatrix} a_l & b_l \\ b_l & b_k\end{pmatrix}$$

とおくとき $C(X,X)$ は正値形式である.[2] したがって 5) により $b_l=0$．$S'AS$ の行列式を第 n 行に沿って余因数に展開するとき，$b_i\,(i\neq l)$ の余因数はすべて 0，$b_l=0$ であるから $S'AS$ が正則であることに矛盾する．したがって $a_i\neq 0\ (i=1,\cdots,k-1)$，すなわち $\Delta_{k-1}\neq 0$ を得る．

7) $\boldsymbol{A}$ を正則，$\boldsymbol{A(x,x)}$ を正値形式とすれば，$\boldsymbol{A}$ の行列式 $\boldsymbol{|A|>0}$[3] である．

---

1) $A(x,x)$ において $x_k=0$ とおけばよい．
2) $S'AS(X,X)$ において $X_j=0\ (j\neq l,k)$ とすればよい．
3) 一般に正方行列 M の行列式を $|M|$ で表わすことにする．

（証明） 4)より正則行列 T が存在し，

$$T'AT=\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

$(x)=T(X)$ なる一次変換を与えれば，

$$A(x,x)=T'AT(X,X)=\sum_{i=1}^{n}a_iX_i^2$$

今もし，$a_l<0$ なる l が存在すれば，$X=(X_1,\cdots,X_n)$ を $X_i=0\,(i\neq l)$，$X_l=1$ として，$T'AT\,(X,X)=a_l<0$ となるから，A したがって，$T'AT$ が正則であることを考慮すれば，$a_i>0\,(i=1,\cdots,n)$ であり，したがって $|A|>0$ を得る．

8) A を正則，$A(x,x)$ を正値形式とすれば $\varDelta_k>0$ $(k=1,2,\cdots,n)$ である．

（証明）

$$A_k=\begin{pmatrix} a_{11}\cdots a_{1k} \\ \vdots \\ a_{k1}\cdots a_{kk} \end{pmatrix} \qquad (k=1,\cdots,n)$$

とおくとき，6)より A_k は正則，また $x=(x_1,\cdots,x_n)$ において $x_i=0\,(i>k)$ とおけば，$A(x,x)=A_k(x,x)$ だから，$A_k(x,x)$ は正値形式である．したがって7)より $\varDelta_k=|A_k|>0\,(k=1,\cdots,n)$ を得る．

9) $|A|=0$，$\varDelta_{n-1}\neq0$ とすれば，適当な正則行列 T が存在し，

$$T'AT=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots a_{1n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-11} & \cdots a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & \cdots \quad 0 & 0 \end{pmatrix}$$

にできる．

（証明） n 個の n 次元のベクトル

$$a_i=(a_{i1},\cdots,a_{in}) \quad (i=1,\cdots,n)$$

を考える．条件より $R(A)=n-1$ [1] だから，$a_i(i=1,\cdots,n)$ は一次従属である．[2] また，

$$B=\begin{pmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n-1,1}\cdots a_{n-1n} \end{pmatrix}, \quad R(B)=n-1$$

だから，$a_i(i=1,\cdots,n-1)$ は一次独立である．そこで $\sum_{i=1}^{n}t_ia_i=0$ で $t_l\neq0$ なる l が存在するように $t_i(i=1,\cdots,n)$ をとることができる．このとき $t_n=0$ とすれば $\sum_{i=1}^{n-1}t_ia_i=0$ となり $t_i=0$ $(i=1,\cdots,n-1)$ となってしまうから $t_n\neq0$ である．今 T を

$$T=\begin{pmatrix} 1 & & 0 & t_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & t_n \end{pmatrix}$$

1) $R(A)$ は A の階数．

2) [1] p. 42 参照．

とすれば目的とする正則行列 T が得られる.

10) A において $\Delta_l>0$ $(l=1,\cdots,n)$ とすれば, $A(x,x)$ は正値形式である.

(証明) A の次数 n に関して数学的帰納法を用いる. $n=1$ のときは明白, $k-1$ まで成立を仮定し, $n=k$ とする. 行列 B を

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots a_{1k} \\ \vdots & \vdots \\ a_{k-11} & \cdots a_{k-1k} \\ a_{k1} & \cdots a_{kk}-\dfrac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}} \end{pmatrix}$$

とおくとき, $|B|=|A|-\Delta_{k-1}\dfrac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}=0,$

$$B_{k-1}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots a_{1\,k-1} \\ \vdots & \vdots \\ a_{k-11} & \cdots a_{k-1\,k-1} \end{pmatrix}, \quad |B_{k-1}|=\Delta_{k-1}>0$$

しかも B は対称行列であるから 9) より正則行列 T が存在し,

$$T'BT=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots a_{1\,k-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \\ a_{k-11} & \cdots a_{k-1\,k-1} & 0 \\ 0 & \cdots\quad 0 & 0 \end{pmatrix}$$

帰納法の仮定より

$$A_{k-1}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots a_{1\,k-1} \\ \vdots & \\ a_{k-11} & \cdots a_{k-1\,k-1} \end{pmatrix}$$

$A_{k-1}(x,\ x)$ は正値形式であるから, 一次変換 $(x)=T(X)$ を与えるとき

$$A(x,\ x)-\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}x_n^2=B(x,\ x)=T'BT(X,\ X)=A_{k-1}(x,\ x)$$

$$A(x,\ x)=A_{k-1}(x,\ x)+\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}x_n^2,\quad \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}>0$$

したがって $A(x,\ x)$ は正値形式である.

以上の考察により, 「まえがき」に示した $A(x,\ x)$ が正値形式であるための必要十分な条件が 8), 10) で与えられたわけである.

文　　献

1) 浅野啓三: 行列と行列式, 共立出版.

2) 高木貞治: 代数学講義, 共立出版.

3) スミルノフ: 高等数教程 (III 巻 1 部), 共立出版.

4) R. クーラン, D. ヒルベルト: 数理物理学の方法 1, 商工出版.