

# 充水鋼管の凍結時における氷の 成長速度について\*

金山 公夫

(昭和41年9月19日受理)

## The Rate of Ice Formation at Freezing of Water Filled in Steel Pipes.

by Kimio KANAYAMA.

### Abstract

Approximate mathematical solution on the rate of ice formation when water froze in a cylindrical boundary, was derived as heat conduction problem. Experiments of freezing of water which was filled in steel pipes were carried out and the results were obtained as follows.

1) The rate of ice formation, at freezing of water filled in steel pipes, was constant out of relation to the diameter, until thickness of ice grew up to one half of radius of pipes.

2) Mathematical solution (8) expressed approximately the phenomenon of ice formation, except for the experimental results were no agreement with Eq. (8) because of temperature distribution in water at the initial period.

3) The periodical variation of temperature on ice surface and the distribution of temperature in ice under the condition that the surface temperature was constant, were expressed approximately by Eq. (1) and Eq. (4) respectively.

### 1. ま え が き

氷点下の大気中におかれた鋼管内の水が冷却し、凍結するときは、管内周辺から凍りはじめ、氷層は次第に中心に向かって成長し、ついに全体が凍結するものとおもう。

その際、氷結がどのような状態で行なわれ、氷層がどれだけの速さで成長し、発達してゆくかという問題に焦点を絞って実験を行ない、あわせて理論解析も行なってみたので、その結果について報告する。

水が氷になるときの熱伝導問題としての特徴は、氷の成長にともなって水と氷の境界面では潜熱が放出され、その移動速度(氷の成長速度)は熱放出量の関数であって、しかも境界面の温度は常に一定(大気圧では $0^{\circ}\text{C}$ )に保たれていることにある。このような相変化を伴う伝熱

\* 日本機械学会北海道支部講演会(昭40.10.1)で発表。

現象は、水の自然対流による熱移動を考えないで、純粹に熱伝導のみによるものとして、F. Neumann や J. Stefan が扱ったようなごく特殊な初期および境界条件では、理論的に厳密解が得られているが<sup>1)</sup>、一般には近似的数値解法によっている。

たとえば、L. R. Ingersoll and O. J. Zobel は表面温度一定として、平板に氷が生成する際の近似解をあたえ<sup>2)</sup>、C. L. Perkeris and L. B. Slichter は、パイプ表面に氷結する氷の成長速度を<sup>3)</sup>、L. Elmer は冷媒を流したパイプ表面への氷結についてそれぞれ近似解を得ている<sup>4)</sup>。さらに、A. L. London and R. A. Seban は氷および容器の熱貫流抵抗と熱平衡を考えて、半無限平板、円筒および球の内外面へ氷結するときの境界面移動の近似解を求め<sup>5)</sup>、甲藤氏は、氷結時に放出する潜熱は水の顕熱に比べてはるかに大きいので、これを瞬間定常問題と考へて、円筒容器内の氷結の静的近似解を求めている<sup>6),7)</sup>が、これらはいずれも表面温度一定の場合に限られる。

また、氷結についての実験的研究は少なく、古くは薄片氷の製氷時における氷成長の実測値があり<sup>8)</sup>、そのほか大気中におかれた円筒容器内の静水の凍結<sup>9)</sup>および層流一次元流れの流水の凍結等の実験結果が最近発表されている<sup>10)</sup>。

## 2. 記号および単位

$A, A'$  は定数

$\theta$ : 温 度 (°C)

$\theta_s$ : 表 面 温 度 (°C)

$\theta_\infty$ : 外気的一般流温度 (°C)

$r$ : 半 径 (m)

$r_i$ : 水と氷の境界面半径 (m)

$R$ : 管の内半径 (m)

$\delta$ : 氷層の厚さ ( $=R-r_i$ ) (m)

$t$ : 時 間 (h)

$t_f$ : 凍結完了時間 (h)

$k$ : 氷の熱伝導率 (kcal/m·h·°C)

$\alpha$ : 氷の温度伝導率 (m<sup>2</sup>/h)

$h$ : 外気と管表面の熱伝達率 (kcal/m<sup>2</sup>·h·°C)

$L$ : 氷の単位重量当りの融解潜熱 (kcal/kg)

$w$ : 氷の比重量 (kg/m<sup>3</sup>)

$c$ : 氷の比熱 (kcal/kg·°C)

$v_m$ : 外気の平均風速 (m/sec)

$F_0$ : フーリエ数

### 3. 氷結の理論解析

鋼管内に満たされている水が凍結する際は、たとえ管壁の温度が一定としても、氷層内の温度分布は時間とともに変化するため、不定常熱伝導方程式を適用しなければならない。

しかし、管内部の氷結では、水と氷の境界面が時間とともに座標原点に向かって進行する有限領域の問題となるので、このような境界条件のもとでは、厳密解を得ることはできない<sup>11)</sup>。

一方、水が氷になるとき放出する潜熱は非常に大きく(約80 kcal/kg)、それに比べて空気の熱容量が小さいので、本例のような大気中で冷されて凍結が進行する場合には、氷の成長速度は小さく、かつ表面の温度変化も緩慢になる。そこで、各瞬間の表面温度において近似的に定常状態がなりたつと考えると、まず定常温度分布を求めて、これに表面温度の時間的変化をあらわす簡単な関数を代入して、静的近似解とすることができよう。

これを、水と氷の境界面における熱平衡の条件式を用いて解くと、氷の成長速度を示す式が得られる。

以下に、2, 3の仮定において近似解析を行なう。

**仮定** 1) 未凍結の水の温度は一様に0°Cで水の自然対流はないものとする。2) 鋼は水および氷に比べて熱伝導率のはるかに大きいから\*、鋼管の存在は熱的に無視する。3) 氷表面の温度変化は次式に従うものとする。

$$\theta_s = \theta_\infty (1 - e^{-At}) \quad (1)$$

熱伝導方程式

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\theta}{dr} = 0 \quad (2)$$

$$(r_i \leq r \leq R)$$

初期条件

$$a) \quad t = 0, \quad \theta = 0 \quad (0 \leq r \leq R)$$

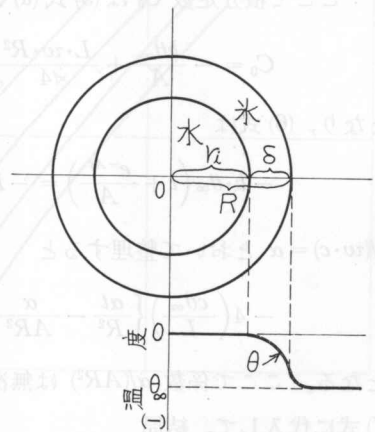
$$r_i = R$$

境界条件

$$b) \quad r = R, \quad t \rightarrow \infty, \quad \theta_s \rightarrow \theta_\infty$$

$$c) \quad r = r_i, \quad \theta = 0$$

$$d) \quad r = r_i, \quad -k \left( \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) = -L \cdot w \frac{dr_i}{dt}$$



第1図 円筒座標と温度分布

(3)

\* 熱伝導率 鋼(0.5%C以下, 20°C) 46 Kcal/m·h·°C<sup>12)</sup>

水(0°C) 0.476 "

氷(0°C) 1.9 "

表面温度  $\theta_s$  (°C) における (2) 式の解は

$$\theta = \theta_s \frac{\ln(r/r_i)}{\ln(R/r_i)} = \theta_\infty (1 - e^{-At}) \frac{\ln(r/r_i)}{\ln(R/r_i)} \quad (4)$$

で、定常状態における温度分布をあらわす式と表面温度の時間的変化をあらわす式の積の形となる。

(4) 式と (3) 式の (d) から

$$-k \left( \frac{\partial \theta}{\partial r} \right)_{r=r_i} = -k \frac{\theta_\infty (1 - e^{-At})}{\ln(R/r_i)} \cdot \frac{1}{r_i} = -L \cdot w \frac{dr_i}{dt} \quad (5)$$

(5) 式を変数分離して積分すると次のようになる。

$$\begin{aligned} -k \cdot \theta_\infty \int (1 - e^{-At}) dt &= -L \cdot w \int \ln \left( \frac{R}{r_i} \right) r_i dr_i + C_0 \\ -k \cdot \theta_\infty \left( t + \frac{e^{-At}}{A} \right) &= -L \cdot w \left\{ \frac{r_i^2}{2} \cdot \ln R - \frac{r_i^2}{2} \left( \ln r_i - \frac{1}{2} \right) \right\} + C_0 \\ &= -L \cdot w \frac{r_i^2}{2} \left\{ \ln \left( \frac{R}{r_i} \right) + \frac{1}{2} \right\} + C_0 \\ &= -L \cdot w \frac{r_i^2}{4} \left\{ 1 - \ln \left( \frac{r_i}{R} \right)^2 \right\} + C_0 \end{aligned} \quad (6)$$

ここで積分定数  $C_0$  は (3) 式 (a) より

$$C_0 = -\frac{k\theta_\infty}{A} + \frac{L \cdot w \cdot R^2}{4}$$

となり、(6) 式は

$$-k \cdot \theta_\infty \left( t + \frac{e^{-At}}{A} \right) = -L \cdot w \cdot \frac{r_i^2}{4} \left\{ 1 - \ln \left( \frac{r_i}{R} \right)^2 \right\} - \frac{k \cdot \theta_\infty}{A} + \frac{L \cdot w \cdot R^2}{4}$$

$k/(w \cdot c) = \alpha$  とおいて整理すると

$$-4 \left( \frac{c\theta_\infty}{L} \right) \left\{ \frac{\alpha t}{R^2} - \frac{\alpha}{AR^2} (1 - e^{-At}) \right\} = 1 - \left( \frac{r_i}{R} \right)^2 \left\{ 1 - \ln \left( \frac{r_i}{R} \right)^2 \right\} \quad (7)$$

となる。ここで係数  $\alpha/(AR^2)$  は無次元数でなければならないから、 $\alpha/(AR^2) \equiv 1/A'$  とおいて (7) 式に代入して、結局

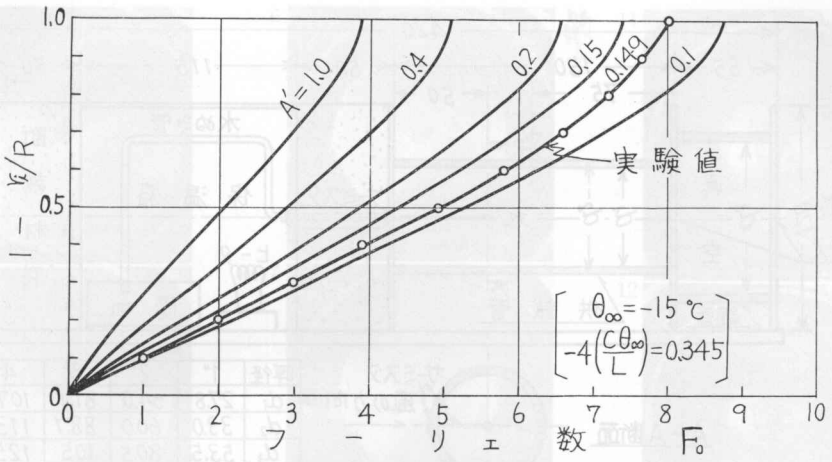
$$-4 \left( \frac{c\theta_\infty}{L} \right) \left\{ \frac{\alpha t}{R^2} - \frac{(1 - e^{-A' \frac{\alpha}{R^2} t})}{A'} \right\} = 1 - \left( \frac{r_i}{R} \right)^2 \left\{ 1 - \ln \left( \frac{r_i}{R} \right)^2 \right\} \quad (8)$$

を得る。(8) 式は氷の厚さ ( $\delta = R - r_i$ ) と時間の関係を示す式であり、これを数値計算して図示すると第 2 図のとおりである。

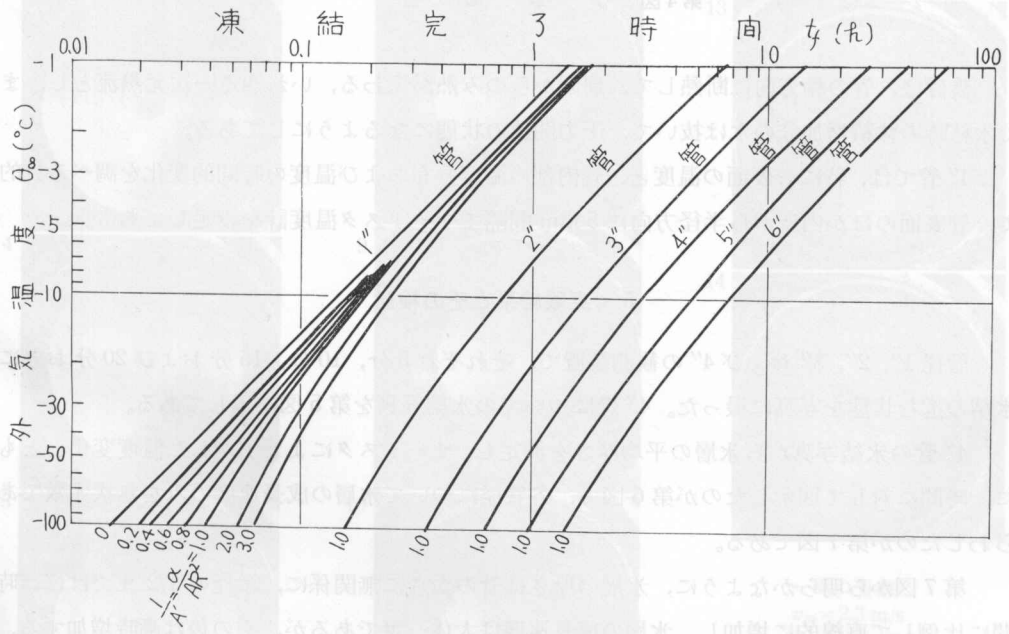
また、全体が凍ってしまう時間  $t_f$  (凍結完了時間) は (8) 式で  $r_i = 0$  とおいて

$$\frac{\alpha t_f}{R^2} - \frac{(1 - e^{-A' \frac{\alpha}{R^2} t_f})}{A'} = -\frac{1}{4} \left( \frac{L}{c\theta_\infty} \right) \quad (9)$$

となる。(9) 式を図示すると第 3 図のとおりである。



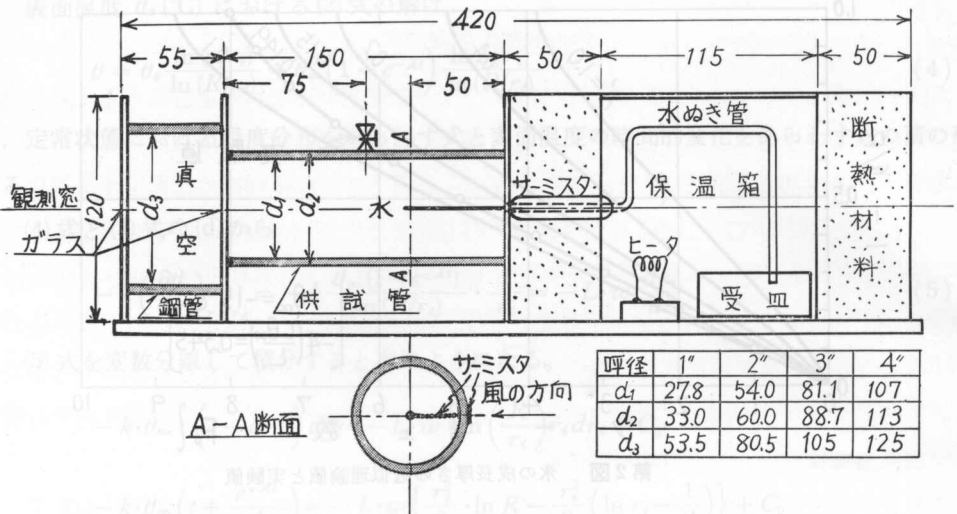
第2図 氷の成長厚さの近似理論値と実験値



第3図 凍結完了時間の近似理論値

#### 4. 実験方法

鋼管内部の氷が成長してゆく状態を観測するために、呼び径 1", 2", 3" および 4" の供試鋼管 (ガス管) を用いて、それぞれ第 4 図のような装置を作製し、これを低温室内に設置した風胴内に水平に、かつ気流に直角におき、外気条件 (気温, 風速) を一定にして、凍結開始と同時に観測窓から一定時間ごとに写真をとって、氷層の厚さを直接測定する。



第4図 実験装置

装置は、管の軸方向は断熱して、周囲からのみ熱が伝わる、いわゆる一次元熱流とし、また氷結時の体積増加分の水は抜いて、圧力開放の状態になるようにしてある。

4"管では、特に管表面の温度と、管内部の温度分布および温度の時間的変化を調べる目的で、管表面のほか内壁から半径方向に5mm間隔でサーミスタ温度計を設定してある。

### 5. 実験結果とその検討

管径1", 2", 3"および4"の観測装置で、それぞれ5分、10分、15分および20分おきに氷結の進む状態を写真に撮った。4"管についての氷結写真を第5図に示してある。

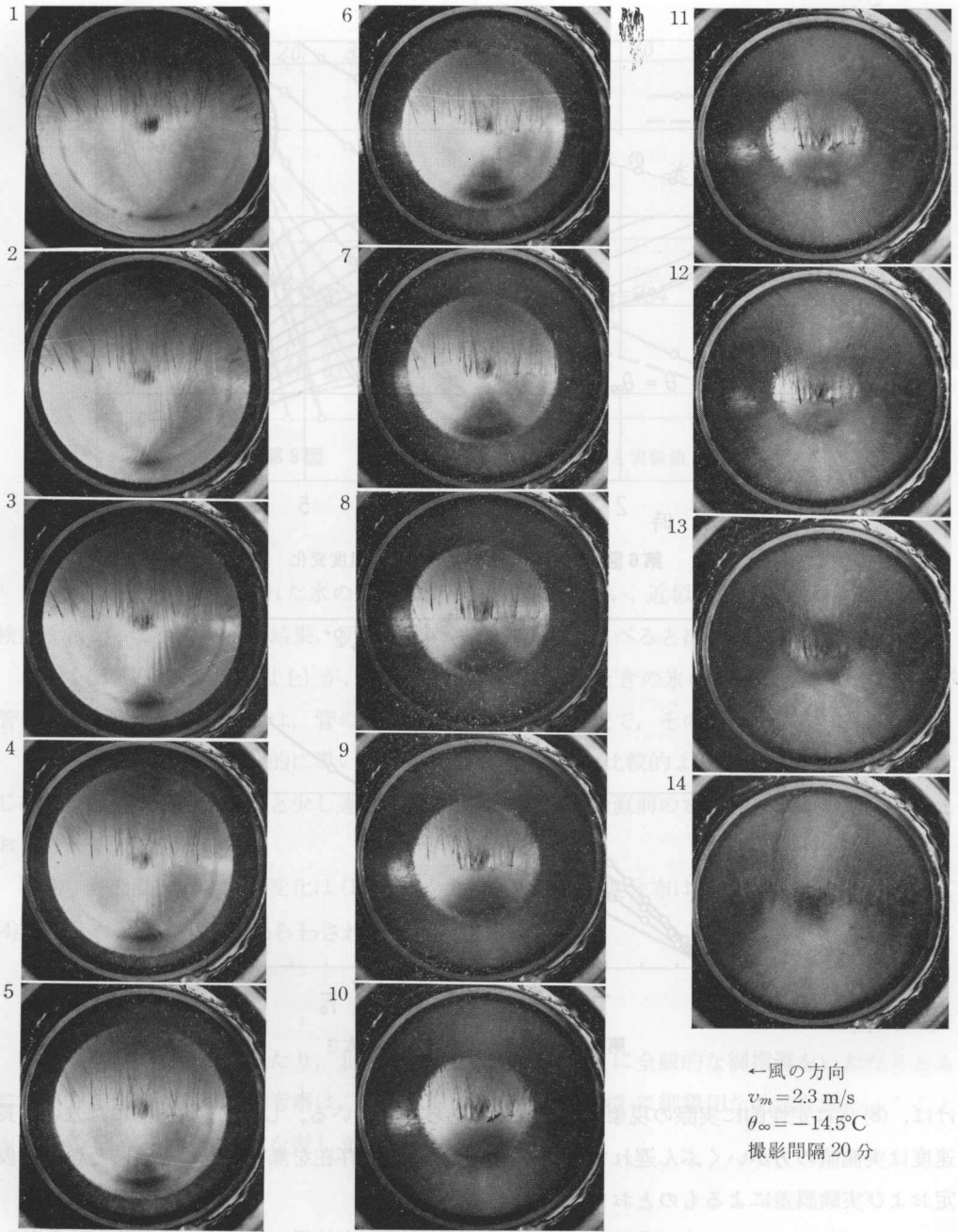
4"管の氷結写真から氷層の平均厚さを測定し、サーミスタにより実測した温度変化とともに、時間に対して図示したのが第6図で、各管径について氷層の成長速度のみを無次元数であらわしたのが第7図である。

第7図から明らかなように、氷層の厚さは管の太さに無関係に、半径の1/2まではほぼ時間に比例して直線的に増加し、氷層の成長速度は大体一定であるが、その後は漸増する。

第2図には、(8)式を数値計算した理論値と4"管の実験結果を比較してある。それによると、(8)式は、凍りはじめでは若干上に凸の曲線で、以後  $\delta/R \approx 0.7$  まではほとんど直線的でほぼ一定の成長速度を示し、 $\delta/R > 0.7$  では下に凸の曲線になり成長速度は漸増している。

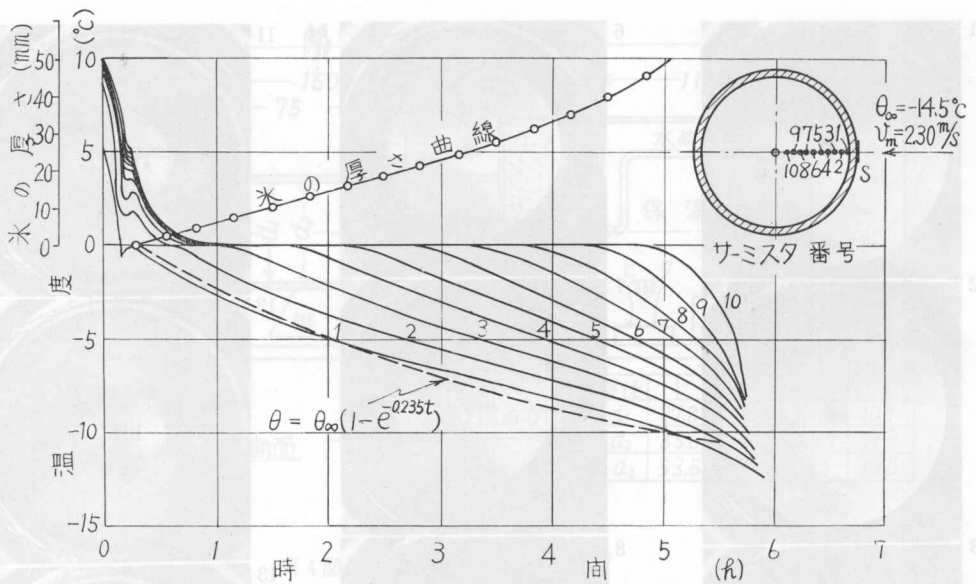
凍りはじめにおける理論値と実験値の定性的な相違は、理論では管内の初期水温が一律に  $0^\circ\text{C}$  と仮定しているのに対して、実際は第6図に示すように管内に温度分布があり、周辺が凍りはじめても中心付近の温度は  $0^\circ\text{C}$  より高いためとおもわれる。

その後の傾向は、氷の成長速度が増加しはじめる時点がいくらか実験値の方が早い事を除

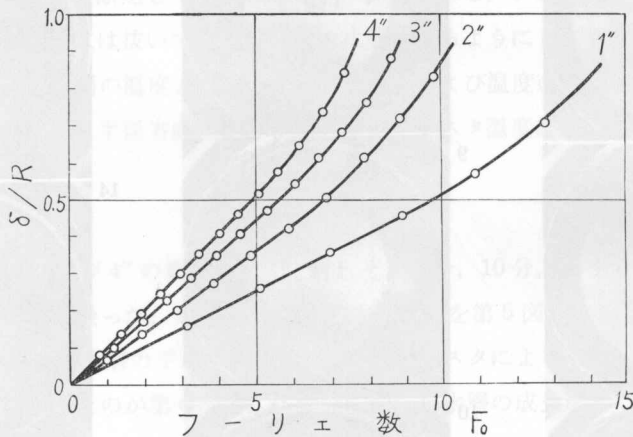


←風の方向  
 $v_m = 2.3 \text{ m/s}$   
 $\theta_\infty = -14.5^\circ\text{C}$   
 撮影間隔 20 分

第5図 4' 管の水結写真



第6図 4" 管の氷の成長厚さと温度変化

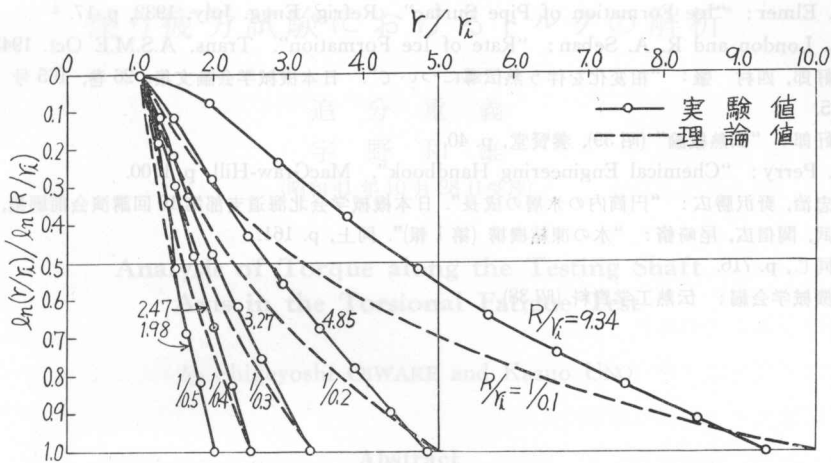


第7図 氷の成長厚さと管の太さ

けば、(8)式は定性的に実際の現象をかなりよくあらわしている。しかし、数値的には氷の成長速度は実測値の方がいくぶん遅れているが、これは鋼管の存在を無視したと、その他の仮定および実験誤差によるものとおもう。

次に、第6図において、4"管についての管内温度の測定結果をみると、管内壁の温度変化、すなわち表面温度変化は(1)式に近似して、この場合  $A=0.235$  を得た。また、氷層中の温度分布の実測値と理論値とを比較して示したのが第8図である。図において実測値と理論値を比較すると、氷層が厚くなると、その内側近くで両者の隔たりが大きくなるが、おおよそ(4)式の温度分布の項で定性的に表現されているとみてよからう。





第8図 氷層内温度分布の近似理論値と実験値

### 6. む す び

以上、鋼管内に満たされた水の凍結について実験を行ない、近似的に求めた理論解と比較、検討を行ってきた。その結果、明らかになった主な点を述べると次のとおりである。

(1) 鋼管内の水 (0°C 以上) が、大気中で冷却して凍るとき氷の成長速度は、氷の厚さが管の半径の 1/2 になるまでは、管の太さに無関係にほぼ一定で、その後は次第に増加する。

(2) 伝熱理論から近似的に導いた (8) 式は、この現象を比較的よく表現している。凍りはじめにおける傾向が、理論と少し違うのは、実際は凍結開始直前の水に温度分布があるためとおもわれる。

(3) 表面温度の時間的变化は (1) 式で、また氷層内の温度分布は、表面温度一定とにおいて (4) 式でそれぞれ近似的にあらわされる。

### 謝 辞

この実験を行なうにあたり、北大工学部 阿部 与 教授に全般的な御指導をいただくとともに、熱的な理論解析および考察は、北大工学部 斎藤 武 教授に御懇切な助言を賜ったことを付記して、深く感謝の意を表します。

### 文 献

- 1) H. S. Carslaw and J. C. Jaeger: "Conduction of Heat in Solids". (1959), p. 283.  
L. R. Ingersoll and O. S. Zobel: "Heat Conduction with Engineering and Geological Application". (1955), p. 190.
- 2) L. R. Ingersoll and O. S. Zobel: "Mathematical Theory of Heat Conduction". (1913), p. 149.
- 3) C. L. Perkeris and L. B. Slichter: "Problem of Ice Formation". Journ. App. Phys. Vol. 10, Feb. 1939, p. 135.

- 4) S. L. Elmer: "Ice Formation of Pipe Surfac". Refrig. Engg. July, 1932, p. 17.
- 5) A. L. London and R. A. Seban: "Rate of Ice Formation". Trans. A.S.M.E Oct. 1943, p. 771.
- 6) 甲藤好郎, 西村 肇: "相変化を伴う熱伝導について". 日本機械学会論文集, 26 巻, 165 号 (昭 35-5), p. 715.
- 7) 甲藤好郎: "伝熱概論" (昭 39), 養賢堂, p. 40.
- 8) J. H. Perry: "Chemical Engineering Handbook". MacGraw-Hill, p. 1700.
- 9) 水野忠治, 野沢勝広: "円筒内の氷層の成長". 日本機械学会北海道支部第 10 回講演会前刷集, p. 165.
- 10) 斎藤武, 関信広, 尾崎脩: "水の凍結機構 (第 1 報)". 同上, p. 161.
- 11) 6) に同じ, p. 716.
- 12) 日本機械学会編: 伝熱工学資料 (昭 38).

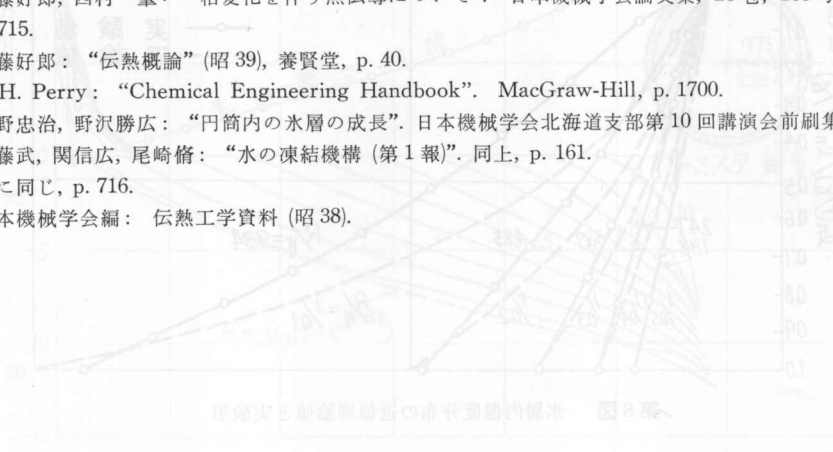


図 1 氷層の厚さと管の半径との関係

図 2 氷層の厚さと管の半径との関係

以上、管内に氷が成長するにつれて、管の断面積が減少し、管内の水流速度が増加する。この結果、管内の氷の成長速度は、管の半径の 1/2 に比例して増加する。すなわち、管の半径が 1/2 に減少すると、管内の氷の成長速度は 2 倍に増加する。これは、管内の氷の成長速度が、管の半径の 1/2 に比例して増加するからである。この結果、管内の氷の成長速度は、管の半径の 1/2 に比例して増加する。これは、管内の氷の成長速度が、管の半径の 1/2 に比例して増加するからである。この結果、管内の氷の成長速度は、管の半径の 1/2 に比例して増加する。これは、管内の氷の成長速度が、管の半径の 1/2 に比例して増加するからである。



図 2 氷層の厚さと管の半径との関係

この実験は、大木管の凍結に関するものである。大木管の凍結は、管内の氷の成長速度が、管の半径の 1/2 に比例して増加するからである。この結果、管内の氷の成長速度は、管の半径の 1/2 に比例して増加する。これは、管内の氷の成長速度が、管の半径の 1/2 に比例して増加するからである。この結果、管内の氷の成長速度は、管の半径の 1/2 に比例して増加する。これは、管内の氷の成長速度が、管の半径の 1/2 に比例して増加するからである。

文 献

H. S. Carslaw and J. C. Jaeger: "Conduction of Heat in Solids", 1959, p. 383.  
 E. R. Ingstoll and O. S. Zobel: "Heat Conduction with Engineering and Geological Applications", 1958, p. 148.  
 E. R. Ingstoll and O. S. Zobel: "Mathematical Theory of Heat Conduction", 1958, p. 148.  
 E. R. Ingstoll and L. R. Sponner: "Problem of Ice Formation", "Johns Hopkins Press", 1958, p. 132.