無限連分数の収束について

礒 部 熙 郎

(昭和 40 年 10 月 9 日受理)

On Convergence of Infinite Continued Fractions

by Kiro ISOBE

Abstract

Let $\{\nu_k\}$ be a sequence of natural numbers. The following form (1) of the sequence $\{\nu_k\}$ is called a *infinite continued fraction.*

$$\cfrac{1}{\nu_1+\cfrac{1}{\nu_2+\cfrac{1}{\ddots}}} \tag{1}$$

From the sequence $\{\nu_k\}$ the sequence $\{\xi_k\}$ is made as follows

$$\xi_k = \cfrac{1}{\nu_1+\cfrac{1}{\ddots\,\cfrac{1}{\nu_{k-1}+\cfrac{1}{\nu_k}}}} \qquad (k=1,\ 2,\ \cdots) \tag{2}$$

and it is convergent sequence.

In this paper, we give the following relations

$$\xi_2<\xi_4<\cdots<\xi_3<\xi_1 \tag{9}$$

$$|\xi_k-\xi_{k-1}|\leq\frac{1}{k\,(k-1)} \tag{8}$$

The conclusion drawn from these relations is *the uniformity about convergence of infinite continued fractions.* Namely, for any positive number ε and sequence of natural numbers $\{\nu_k\}$, there exists some natural number N such that

$$N\leq k,\ l \text{ implies } |\xi_k-\xi_l|<\varepsilon.$$

Furthermore, let S be the totality of all sequences of natural numbers and R be the totality of all irrational numbers in the open interval $(0,\ 1)$. We define the metric function d in the space S as follows

$$d\,(a,\ b)=\frac{1}{Min\,\{k:\ \nu_k\neq\mu_k\}} \qquad (S\ni a,\ b,\ a=\{\nu_k\},\ \ b=\{\mu_k\}).$$

The space R is the subspace of the *real line.* In this paper, the relations between the spaces S and R are discussed.

まえがき

$\{\nu_k\}$ を自然数の無限列とする。

$$\cfrac{1}{\nu_1+\cfrac{1}{\nu_2+\cfrac{1}{\nu_3+\ddots}}} \tag{1}$$

の形にかかれたものを**無限連分数**という。

$\{\nu_k\}$ から

$$\xi_k=\cfrac{1}{\nu_1+\cfrac{1}{\nu_2+\cfrac{1}{\ddots\,\cfrac{1}{\nu^{k-1}+\cfrac{1}{\nu_k}}}}} \tag{2}$$

として，無限列 $\{\xi_k\}$ を作り，更に，無限列 $\{P_k\}$，$\{Q_k\}$ をつぎのように定めるとき，

$$\begin{array}{ll} P_0=1 & Q_0=0 \\ P_1=\nu_1 & Q_1=1 \\ P_k=\nu_kP_{k-1}+P_{k-2} & Q_k=\nu_kQ_{k-1}+Q_{k-2} \end{array} \tag{3}$$

$$\xi_k=\frac{Q_k}{P_k} \quad {}^{1)} \tag{4}$$

$$\xi_k-\xi_{k-1}=\frac{(-1)^{k-1}}{P_kP_{k-1}} \quad {}^{2)} \tag{5}$$

がなりたつ。(5)を用いれば，$\{\xi_k\}$ は $\{\nu_k\}$ のとり方いかんにかかわらず一様に収束することがわかる。すなわち，任意の正数 ε に対して，適当な自然数 N を定め，如何なる自然数の無限列 $\{\nu_k\}$ から(2)により $\{\xi_k\}$ を作っても，常に

$$N\leqq k,\ l \quad \text{ならば} \quad |\xi_k-\xi_l|<\varepsilon$$

となるようにできる。従って $\{\xi_k\}$ は収束し，その極限値を**無限連分数(1)の値**とする。

自然数の無限列 $\{\nu_k\}$ の全体よりなる空間を S とする。$S\ni a,\ b,\ a=\{\alpha_k\},\ b=\{\beta_k\}$ に対し

$$d(a,\ b)=\frac{1}{\mathrm{Min}\,\{k:\ \alpha_k\neq\beta_k\}} \quad {}^{3)} \tag{6}$$

とおけば，S は d を距離とする距離空間となる。この距離空間 S の点 $a=\{\alpha_k\}$ に対し，$\{\alpha_k\}$

---

1), 2) 次節で証明するが，[1] pp. 7–11 参照。

3) [2] pp. 30 参照。

から作った無限連分数(1)の値 $\varphi(a)$ を対応させれば，空間 S は $(0, 1)$ 内の無理数の全体よりなる数直線の部分空間 R と位相同型になる。

この小論においては，以上の問題を論ずることにする。

1. 無限連分数の収束の特徴

読者の便を考え，(4), (5) について簡単な証明を数学的帰納法により与えることにする。

まず，ξ_k は ξ_{k-1} において，ν_{k-1} を $\nu_{k-1}+1/\nu_k$ でおきかえれば得られることに注意する。

$$\xi_1 = \frac{Q_1}{P_1}, \qquad \xi_2 = \frac{Q_2}{P_2}$$

は直接確められる。

一般に

$$\xi_{k-1} = \frac{Q_{k-1}}{P_{k-1}}\left(= \frac{\nu_{k-1}Q_{k-2}+Q_{k-3}}{\nu_{k-1}P_{k-2}+P_{k-3}}\right) \qquad (k \geq 3)$$

を仮定すれば

$$\xi_k = \frac{\left(\nu_{k-1}+\dfrac{1}{\nu_k}\right)Q_{k-2}+Q_{k-3}}{\left(\nu_{k-1}+\dfrac{1}{\nu_k}\right)P_{k-2}+P_{k-3}}$$

$$= \frac{\nu_k Q_{k-1}+Q_{k-2}}{\nu_k P_{k-1}+P_{k-2}} = \frac{Q_k}{P_k}$$

したがって，(4) は成立する。

つぎに，

$$P_{k-1}Q_k - P_kQ_{k-1} = (-1)^{k-1} \qquad (k \geq 1) \tag{7}$$

の成立を示そう。

$k=1$ のときは明らかである。

一般にある k に対して，(7) を仮定すれば，

$$\begin{aligned} P_kQ_{k+1}-P_{k+1}Q_k &= P_k(\nu_{k+1}Q_k+Q_{k-1})-(\nu_{k+1}P_k+P_{k-1})Q_k \\ &= P_kQ_{k-1}-P_{k-1}Q_k = (-1)^k \end{aligned}$$

したがって，(7) は成立する。

(4) と (7) とを用いれば

$$\xi_k - \xi_{k-1} = \frac{Q_k}{P_k} - \frac{Q_{k-1}}{P_{k-1}} = \frac{P_{k-1}Q_k - P_kQ_{k-1}}{P_kP_{k-1}} = \frac{(-1)^{k-1}}{P_kP_{k-1}}$$

となり，(5) が成立する。

$\{P_k\}$ の作り方より $P_k \geq k$ $(k=1, 2, \cdots)$ である。したがって，(5) より

$$|\xi_k - \xi_{k-1}| \leq \frac{1}{k(k-1)} \qquad (k \geq 2) \tag{8}$$

が得られる。

$\{\xi_k\}$ はつぎのようになっている。

$$\xi_2<\xi_4<\cdots<\xi_3<\xi_1 \tag{9}$$

(9) を示すためには，つぎの i), ii) を証明すればよい。

i) k が奇数，$k<l$ ならば $\xi_l<\xi_k$

ii) k が偶数，$k<l$ ならば $\xi_k<\xi_l$

(証明) i) については (5) を用いて

$$\xi_l-\xi_k=(\xi_l-\xi_{l-1})+(\xi_{l-1}-\xi_{l-2})+\cdots+(\xi_{k+1}-\xi_k)$$

$$=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{P_lP_{l-1}}-\dfrac{1}{P_{l-1}P_{l-2}}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{P_{k+2}P_{k+1}}-\dfrac{1}{P_{k+1}P_k}\right) & (l\text{ は奇数})\\ -\dfrac{1}{P_lP_{l-1}}+\left(\dfrac{1}{P_{l-1}P_{l-2}}-\dfrac{1}{P_{l-2}P_{l-3}}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{P_{k+2}P_{k+1}}-\dfrac{1}{P_{k+1}P_k}\right) & (l\text{ は偶数})\end{cases}$$

ここで $\{P_k\}$ の作り方より，$0<P_1<P_2<\cdots$ に注意すれば，右辺の各項は負であるから，

$$\xi_l-\xi_k<0,\qquad \xi_l<\xi_k$$

が得られる。

ii) についても

$$\xi_l-\xi_k=(\xi_l-\xi_{l-1})+(\xi_{l-1}-\xi_{l-2})+\cdots+(\xi_{k+1}-\xi_k)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{P_lP_{l-1}}+\left(-\dfrac{1}{P_{l-1}P_{l-2}}+\dfrac{1}{P_{l-2}P_{l-3}}\right)+\cdots+\left(-\dfrac{1}{P_{k+2}P_{k+1}}+\dfrac{1}{P_{k+1}P_k}\right) & (l\text{ は奇数})\\ \left(-\dfrac{1}{P_lP_{l-1}}+\dfrac{1}{P_{l-1}P_{l-2}}\right)+\cdots+\left(-\dfrac{1}{P_{k+2}P_{k+1}}+\dfrac{1}{P_{k+1}P_k}\right) & (l\text{ は偶数})\end{cases}$$

となり，右辺の各項は正となるから

$$\xi_l-\xi_k>0,\qquad \xi_k<\xi_l$$

が得られる。

(8) と (9) より $\{\xi_k\}$ が基本列であることが容易にわかり $\{\xi_k\}$ は収束する。したがって，まえがきにおける，$S\ni a$ に対する $\varphi(a)$ の存在が認められたわけである。更に $\{\xi_k\}$ の収束のしかたは $\{\nu_k\}$ のとり方いかんにかかわらず一様である。すなわち，

iii) 任意の正数 ε に対し，いかなる自然数の無限列 $\{\nu_k\}$ から (2) により無限列 $\{\xi_k\}$ を作っても，それらに共通に適当な自然数 N が存在して，

$$N\leqq k,\ l\ \text{ならば}\ |\xi_k-\xi_l|<\varepsilon$$

が成立する。

ことも同時に認められる。

2. 無理数の無限連分数による表現

まず S の点 $a=\{\alpha_k\}$ と $\varphi(a)$ との関係を調べてみることにする。

$0<\varphi(a)<1$ は明らかである。今，整数の無限列 $\{\nu_k\}$ と正数の無限列 $\{\varepsilon_k\}$ とをつぎのように定める。

$$\begin{aligned}
\nu_1 &= \mathrm{Max}\left\{\nu:\ \nu<\frac{1}{\varphi(a)},\quad \nu\text{は整数}\right\}\\
\varepsilon_1 &= \frac{1}{\varphi(a)}-\nu_1\\
\nu_{k+1} &= \mathrm{Max}\left\{\nu:\ \nu<\frac{1}{\varepsilon_k},\quad \nu\text{は整数}\right\}\\
\varepsilon_{k+1} &= \frac{1}{\varepsilon_k}-\nu_{k+1}
\end{aligned}\tag{10}$$

$\{\nu_k\}$ と $\{\varepsilon_k\}$ との作り方より

$$\varphi(a)=\frac{1}{\nu_1+\varepsilon_1}=\frac{1}{\nu_1+\cfrac{1}{\nu_2+\varepsilon_2}}=\frac{1}{\nu_1+\cfrac{1}{\nu_2+\cfrac{1}{\nu_3+\varepsilon_3}}}=\cdots\tag{11}$$

である。さてここで

$$\nu_k=\alpha_k\qquad(k=1,\ 2,\cdots)\tag{12}$$

の成立を数学的帰納法により証明しよう。

$\{\alpha_k\}$ から (2) によって作った無限列を $\{\xi_k\}$ とする。(9) より

$$\xi_2=\frac{1}{\alpha_1+\cfrac{1}{\alpha_2}}<\varphi(a)<\frac{1}{\alpha_1}=\xi_1$$

$$\alpha_1+1\geqq\alpha_1+\frac{1}{\alpha_2}>\frac{1}{\varphi(a)}>\alpha_1$$

したがって，

$$\nu_1=\alpha_1$$

である。

$$\nu_1=\alpha_1,\quad \nu_2=\alpha_2,\quad \cdots,\quad \nu_k=\alpha_k$$

の成立を仮定するとき，

a) k が奇数ならば (9) より

$$\xi_{k+1}=\frac{1}{\alpha_1+\cfrac{1}{\alpha_2+\cfrac{1}{\ddots\,\cfrac{1}{\alpha_k+\cfrac{1}{\alpha_{k+1}}}}}}<\frac{1}{\alpha_1+\cfrac{1}{\alpha_2+\cfrac{1}{\ddots\,\cfrac{1}{\alpha_k+\varepsilon_k}}}}=\varphi(a)$$

この不等式の両辺の逆数をとり，α_1 を引けば

$$\cfrac{1}{\alpha_2+\cfrac{1}{\ddots\,\cfrac{1}{\alpha_k+\cfrac{1}{\alpha_{k+1}}}}}>\cfrac{1}{\alpha_2+\cfrac{1}{\ddots\,\cfrac{1}{\alpha_k+\varepsilon_k}}}$$

この操作 (*) を k (奇数) 回続ければ

$$\frac{1}{\alpha_{k+1}}>\varepsilon_k, \qquad \alpha_{k+1}<\frac{1}{\varepsilon_k}$$

が得られ，ν_{k+1} の作り方より

$$\alpha_{k+1}\leqq\nu_{k+1}$$

である。また一方

$$\varphi(a)=\cfrac{1}{\alpha_1+\cfrac{1}{\alpha_2+\cfrac{1}{\ddots\,\cfrac{1}{\alpha_k+\varepsilon_k}}}}<\cfrac{1}{\alpha_1+\cfrac{1}{\alpha_2+\cfrac{1}{\ddots\,\cfrac{1}{\alpha_{k+1}+\cfrac{1}{\alpha_{k+2}}}}}}=\xi_{k+2}$$

に対し，前述の操作 (*) を k (奇数) 回施せば

$$\varepsilon_k>\cfrac{1}{\alpha_{k+1}+\cfrac{1}{\alpha_{k+2}}}>\frac{1}{\alpha_k+1}, \qquad \frac{1}{\varepsilon_k}<\alpha_{k+1}+1$$

が得られ，ν_{k+1} の作り方から

$$\nu_{k+1}\leqq\alpha_{k+1}$$

が得られる。故に

$$\nu_{k+1}=\alpha_{k+1}$$

である。

b) k が偶数のときにも a) における方法は同じように適用され，$\nu_{k+1}=\alpha_{k+1}$ が得られる。したがって (12) は成立する。

つぎに，

iv) $\varphi(a)$ は (0, 1) に含まれる無理数であることを証明する。

$0<\varphi(a)<1$ は明らかであるが，もし，$\varphi(a)$ が有理数であるとするならば，(10) における ε_k はことごとく有理数である。したがって，

$$\varepsilon_k=\frac{f_k}{g_k} \qquad (f_k,\ g_k \text{ は自然数}) \quad (k=1,\ 2,\ \cdots)$$

を既約分数とすれば，

$$\frac{1}{\varepsilon_k}=\nu_{k+1}+\frac{f_{k+1}}{g_{k+1}}=\alpha_{k+1}+\frac{f_{k+1}}{g_{k+1}}=\frac{g_k}{f_k}$$

$$g_k=\alpha_{k+1}f_k+\frac{f_k f_{k+1}}{g_{k+1}}$$

f_{k+1} と g_{k+1} とは共通因数をもたないから，f_k は g_{k+1} の倍数である。したがって，

$$g_k \geqq f_k \geqq g_{k+1}$$

ここで常に等号が成立しないとすれば

$$g_1>g_2>\cdots$$

となり不合理である。ゆえに適当な k_0 に対して，

$$g_{k_0}=f_{k_0}=g_{k_0+1}, \qquad \varepsilon_{k_0}=1$$

となる。したがって(12)より

$$\alpha_{k_0+1}=\nu_{k_0+1}=\mathrm{Max}\,\{\nu:\ \nu<\varepsilon_{k_0}\,(=1),\ \nu\text{ は整数}\}=0$$

となるが α_{k_0+1} は自然数であるから 0 ではない。故に $\varphi(a)$ は有理数ではなく無理数である。

v) $0<\alpha<1$ なる任意の無理数 α に対して，α に収束する無限連分数が存在することは，つぎのようにして証明される。

(10)において，$\varphi(a)$ を α に代えて，整数の無限列 $\{\nu_k\}$ と正数の無限列 $\{\varepsilon_k\}$ を作ることができる。このとき ε_k はことごとく (0, 1) に含まれる無理数になるから，$\{\nu_k\}$ は自然数の無限列となる。$\{\nu_k\}$ から(2)によって作った無限列を $\{\xi_k\}$ とする。不等式

$$\nu_k<\nu_k+\varepsilon_k$$

の両辺の逆数をとり ν_{k-1} を加えれば，

$$\nu_{k-1}+\frac{1}{\nu_k}>\nu_{k-1}+\frac{1}{\nu_k+\varepsilon_k}$$

k が奇数のとき，この操作を $k-1$ (偶数) 回続ければ

$$\nu_1+\cfrac{1}{\nu_2+\cfrac{1}{\ddots\,\cfrac{1}{\nu_{k-1}+\cfrac{1}{\nu_k}}}}<\nu_1+\cfrac{1}{\nu_2+\cfrac{1}{\ddots\,\cfrac{1}{\nu_{k-1}+\cfrac{1}{\nu_k+\varepsilon_k}}}}$$

したがって，両辺の逆数をとれば

$$\xi_k>\cfrac{1}{\nu_1+\cfrac{1}{\nu_2+\cfrac{1}{\ddots\,\cfrac{1}{\nu_{k-1}+\cfrac{1}{\nu_k+\varepsilon_k}}}}}=\alpha$$

またkが偶数のときにも，上述と同じ方法で今度は $\xi_k<\alpha$ が得られる。ゆえに(9)により

$$\xi_2<\xi_4<\cdots<\alpha<\cdots<\xi_3<\xi_1$$

となり $\{\xi_k\}$ の収束は iii) で示されているから

$$\lim_{k\to\infty}\xi_k=\alpha$$

は明らかである。

3. S と R の位相同型

iv) で示したように

$S\ni a$ に対し $\varphi(a)\in R$ である。

また(12)により

$S\ni a,\ b,\ \varphi(a)=\varphi(b)$ ならば $a=b$ である。

v) によれば

$R\ni\alpha$ に対し，$\alpha=\varphi(a)$ なる $a\in S$ が存在する。

したがって

vi) φ は S と R との間に一対一対応を与えている。

vii) φ は S の上で一様連続である。

なぜならば，任意の正数 ε に対し，$1/k_0(k_0-1)<\varepsilon/3$ を満足する自然数 k_0 をとり，$0<\delta<1/k_0$ なる δ を定めれば

$$S\ni a,\ b,\qquad a=\{\alpha_k\},\qquad b=\{\beta_k\},\qquad d(a,\ b)<\delta$$

とするとき，

$$\alpha_1=\beta_1,\qquad\cdots,\qquad\alpha_{k_0}=\beta_{k_0}$$

がなりたち，a, b に(2)によって対応する無限列を，それぞれ，$\{\xi_{ak}\}$，$\{\xi_{bk}\}$ とおけば iii) および(8), (9)より

$$|\varphi(a)-\varphi(b)|\leq|\varphi(a)-\xi_{ak_0}|+|\xi_{ak_0}-\xi_{bk_0}|+|\xi_{bk_0}-\varphi(b)|<\varepsilon$$

である。

viii) φ^{-1} は R の上で連続であることはつぎのように証明される。

$\alpha_n\to\alpha$ $(n\to\infty)$, $\alpha_n,\ \alpha\in R$ なる R の無限列 $\{\alpha_n\}$ に対し，

$$\varphi^{-1}(\alpha_n)=a_n=\{\mu_{nk}\}_k,\qquad\varphi^{-1}(\alpha)=a=\{\kappa_k\}$$

とおき，α_n, α から，(10)に示したようにして，それぞれ整数の無限列 $\{\nu_{nk}\}_k$，$\{\nu_k\}$ と正数の無限列 $\{\varepsilon_{nk}\}_k$，$\{\varepsilon_k\}$ を作る。(12)により，それぞれ，

$$\mu_{nk}=\nu_{nk},\qquad\kappa_k=\nu_k$$

である。α_n, α, ε_{nk}, ε_k 等がことごとく無理数であることに注意すれば，

$$\varepsilon_{nk} \to \varepsilon_k, \qquad \mu_{nk} \to \kappa_k \qquad (n \to \infty)$$

が得られるから，$\lim_{n\to\infty} d(a_n, a)=0$ の成立は明らかである。ただし，φ^{-1} は R の上で一様連続にはならない。

vi), vii), viii) をまとめれば,

ix) φ は R と S との間に位相同型対応を与えている。　(1965年10月9日)

文　献

[1] N. M. ヴィノグラードフ: 整数論入門. pp. 7-11, 共立全書.

[2] 竹之内 脩: トポロジー. pp. 30-31, 広川書店.