

無限連分数の収束について

磯部 熙郎

(昭和 40 年 10 月 9 日受理)

On Convergence of Infinite Continued Fractions

by Kiro ISOBE

Abstract

Let $\{\nu_k\}$ be a sequence of natural numbers. The following form (1) of the sequence $\{\nu_k\}$ is called a *infinite continued fraction*.

$$\frac{1}{\nu_1 + \frac{1}{\nu_2 + \frac{1}{\ddots}}} \quad (1)$$

From the sequence $\{\nu_k\}$ the sequence $\{\xi_k\}$ is made as follows

$$\xi_k = \frac{1}{\nu_1 + \frac{1}{\nu_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{\nu_{k-1} + \frac{1}{\nu_k}}}}} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (2)$$

and it is convergent sequence.

In this paper, we give the following relations

$$\xi_2 < \xi_4 < \dots < \xi_3 < \xi_1 \quad (9)$$

$$|\xi_k - \xi_{k-1}| \leq \frac{1}{k(k-1)} \quad (8)$$

The conclusion drawn from these relations is the *uniformity about convergence of infinite continued fractions*. Namely, for any positive number ε and sequence of natural numbers $\{\nu_k\}$, there exists some natural number N such that

$$N \leq k, l \text{ implies } |\xi_k - \xi_l| < \varepsilon.$$

Furthermore, let S be the totality of all sequences of natural numbers and R be the totality of all irrational numbers in the open interval $(0, 1)$. We define the metric function d in the space S as follows

$$d(a, b) = \frac{1}{\min\{k : \nu_k \neq \mu_k\}} \quad (S \ni a, b, a = \{\nu_k\}, b = \{\mu_k\}).$$

The space R is the subspace of the *real line*. In this paper, the relations between the spaces S and R are discussed.

embodies two distinctive understandings of the Biblical God. One is that God represents a Christian benevolent view of life, and the other is that God represents a God who is controlled by a contingent God, and which allows for the possibility of evil.

まえがき

$\{\nu_k\}$ を自然数の無限列とする。

この無限列 $\{\nu_k\}$ の逆数連分数は、 $\frac{1}{\nu_1 + \frac{1}{\nu_2 + \frac{1}{\nu_3 + \dots}}}$ である。これを ξ_k と定めると、(1) が得られる。

$$\xi_k = \frac{1}{\nu_1 + \frac{1}{\nu_2 + \frac{1}{\nu_3 + \dots}}} \quad (2)$$

として、無限列 $\{\xi_k\}$ を作り、更に、無限列 $\{P_k\}$, $\{Q_k\}$ をつぎのように定めるとき、

$$\begin{aligned} P_0 &= 1 & Q_0 &= 0 \\ P_1 &= \nu_1 & Q_1 &= 1 \\ P_k &= \nu_k P_{k-1} + P_{k-2} & Q_k &= \nu_k Q_{k-1} + Q_{k-2} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\xi_k = \frac{Q_k}{P_k} \quad (4)$$

$$\xi_k - \xi_{k-1} = \frac{(-1)^{k-1}}{P_k P_{k-1}} \quad (5)$$

がなりたつ。(5)を用いれば、 $\{\xi_k\}$ は $\{\nu_k\}$ のとり方いかんにかかわらず一様に収束することがわかる。すなわち、任意の正数 ϵ に対して、適当な自然数 N を定め、如何なる自然数の無限列 $\{\nu_k\}$ から(2)により $\{\xi_k\}$ を作っても、常に

$$N \leq k, l \text{ ならば } |\xi_k - \xi_l| < \epsilon$$

となるようにできる。従って $\{\xi_k\}$ は収束し、その極限値を無限連分数(1)の値とする。

自然数の無限列 $\{\nu_k\}$ の全体よりなる空間を S とする。 $S \ni a, b, a = \{\alpha_k\}, b = \{\beta_k\}$ に対し

$$d(a, b) = \frac{1}{\min \{k : \alpha_k \neq \beta_k\}} \quad (6)$$

とおけば、 S は d を距離とする距離空間となる。この距離空間 S の点 $a = \{\alpha_k\}$ に対し、 $\{\alpha_k\}$

1), 2) 次節で証明するが、[1] pp. 7-11 参照。

3) [2] pp. 30 参照。

から作った無限連分数(1)の値 $\varphi(a)$ を対応させれば、空間 S は $(0, 1)$ 内の無理数の全体よりなる数直線の部分空間 R と位相同型になる。

この小論においては、以上の問題を論ずることにする。

1. 無限連分数の収束の特徴

読者の便を考え、(4), (5)について簡単な証明を数学的帰納法により与えることとする。

まず、 ξ_k は ξ_{k-1} において、 ν_{k-1} を $\nu_{k-1} + 1/\nu_k$ でおきかえれば得られることに注意する。

$$\xi_1 = \frac{Q_1}{P_1}, \quad \xi_2 = \frac{Q_2}{P_2}$$

は直接確かめられる。

一般に

$$\xi_{k-1} = \frac{Q_{k-1}}{P_{k-1}} \left(= \frac{\nu_{k-1} Q_{k-2} + Q_{k-3}}{\nu_{k-1} P_{k-2} + P_{k-3}} \right) \quad (k \geq 3)$$

を仮定すれば

$$\begin{aligned} \xi_k &= \frac{\left(\nu_{k-1} + \frac{1}{\nu_k}\right) Q_{k-2} + Q_{k-3}}{\left(\nu_{k-1} + \frac{1}{\nu_k}\right) P_{k-2} + P_{k-3}} \\ &= \frac{\nu_k Q_{k-1} + Q_{k-2}}{\nu_k P_{k-1} + P_{k-2}} = \frac{Q_k}{P_k} \end{aligned}$$

したがって、(4)は成立する。

つぎに、

$$P_{k-1}Q_k - P_kQ_{k-1} = (-1)^{k-1} \quad (k \geq 1) \quad (7)$$

の成立を示そう。

$k=1$ のときは明らかである。

一般にある k に対して、(7)を仮定すれば、

$$\begin{aligned} P_kQ_{k+1} - P_{k+1}Q_k &= P_k(\nu_{k+1}Q_k + Q_{k-1}) - (\nu_{k+1}P_k + P_{k-1})Q_k \\ &= P_kQ_{k-1} - P_{k-1}Q_k = (-1)^k \end{aligned}$$

したがって、(7)は成立する。

(4)と(7)とを用いれば

$$\xi_k - \xi_{k-1} = \frac{Q_k}{P_k} - \frac{Q_{k-1}}{P_{k-1}} = \frac{P_{k-1}Q_k - P_kQ_{k-1}}{P_kP_{k-1}} = \frac{(-1)^{k-1}}{P_kP_{k-1}}$$

となり、(5)が成立する。

$\{P_k\}$ の作り方より $P_k \geq k$ ($k=1, 2, \dots$) である。したがって、(5)より

$$|\xi_k - \xi_{k-1}| \leq \frac{1}{k(k-1)} \quad (k \geq 2) \quad (8)$$

が得られる。従って $\{\xi_k\}$ は (i) の場合と同様に収束する。また、前項の収束性を用いて $\{\xi_k\}$ はつぎのようになっている。

$$\xi_2 < \xi_4 < \cdots < \xi_3 < \xi_1 \quad \text{（(9)）}$$

(9) を示すためには、つぎの i), ii) を証明すればよい。

i) k が奇数、 $k < l$ ならば $\xi_l < \xi_k$

ii) k が偶数、 $k < l$ ならば $\xi_k < \xi_l$

(証明) i) については (5) を用いて

$$\begin{aligned} \xi_l - \xi_k &= (\xi_l - \xi_{l-1}) + (\xi_{l-1} - \xi_{l-2}) + \cdots + (\xi_{k+1} - \xi_k) \\ &= \left\{ \frac{1}{P_l P_{l-1}} - \frac{1}{P_{l-1} P_{l-2}} \right\} + \cdots + \left\{ \frac{1}{P_{k+2} P_{k+1}} - \frac{1}{P_{k+1} P_k} \right\} \quad (l \text{ は奇数}) \\ &= \left\{ -\frac{1}{P_l P_{l-1}} + \left(\frac{1}{P_{l-1} P_{l-2}} - \frac{1}{P_{l-2} P_{l-3}} \right) \right\} + \cdots + \left\{ -\frac{1}{P_{k+2} P_{k+1}} + \left(\frac{1}{P_{k+1} P_k} - \frac{1}{P_k P_{k-1}} \right) \right\} \quad (l \text{ は偶数}) \end{aligned}$$

ここで $\{P_k\}$ の作り方より、 $0 < P_1 < P_2 < \cdots$ に注意すれば、右辺の各項は負であるから、

$$\xi_l - \xi_k < 0, \quad \xi_l < \xi_k$$

が得られる。

ii) についても

$$\begin{aligned} \xi_l - \xi_k &= (\xi_l - \xi_{l-1}) + (\xi_{l-1} - \xi_{l-2}) + \cdots + (\xi_{k+1} - \xi_k) \\ &= \left\{ \frac{1}{P_l P_{l-1}} + \left(-\frac{1}{P_{l-1} P_{l-2}} + \frac{1}{P_{l-2} P_{l-3}} \right) \right\} + \cdots + \left\{ -\frac{1}{P_{k+2} P_{k+1}} + \frac{1}{P_{k+1} P_k} \right\} \quad (l \text{ は奇数}) \\ &= \left\{ \left(-\frac{1}{P_l P_{l-1}} + \frac{1}{P_{l-1} P_{l-2}} \right) \right\} + \cdots + \left\{ -\frac{1}{P_{k+2} P_{k+1}} + \frac{1}{P_{k+1} P_k} \right\} \quad (l \text{ は偶数}) \end{aligned}$$

となり、右辺の各項は正となるから

$$\xi_l - \xi_k > 0, \quad \xi_k < \xi_l$$

が得られる。

(8) と (9) より $\{\xi_k\}$ が基本列であることが容易にわかり $\{\xi_k\}$ は収束する。したがって、まえがきにおける、 $S \ni a$ に対する $\varphi(a)$ の存在が認められたわけである。更に $\{\xi_k\}$ の収束のしかたは $\{\nu_k\}$ のとり方いかんにかかわらず一様である。すなわち、

iii) 任意の正数 ε に対し、いかなる自然数の無限列 $\{\nu_k\}$ から (2) により無限列 $\{\xi_k\}$ を作っても、それらに共通に適当な自然数 N が存在して、

$$N \leq k, l \text{ ならば } |\xi_k - \xi_l| < \varepsilon$$

が成立する。

ことも同時に認められる。

2. 無理数の無限連分数による表現

まず S の点 $a = \{\alpha_k\}$ と $\varphi(a)$ との関係を調べてみることにする。

$0 < \varphi(a) < 1$ は明らかである。今、整数の無限列 $\{\nu_k\}$ と正数の無限列 $\{\varepsilon_k\}$ とをつぎのように定める。

$$\begin{aligned}\nu_1 &= \operatorname{Max} \left\{ \nu : \nu < \frac{1}{\varphi(a)}, \quad \nu \text{ は整数} \right\} \\ \varepsilon_1 &= \frac{1}{\varphi(a)} - \nu_1 \\ \nu_{k+1} &= \operatorname{Max} \left\{ \nu : \nu < \frac{1}{\varepsilon_k}, \quad \nu \text{ は整数} \right\} \\ \varepsilon_{k+1} &= \frac{1}{\varepsilon_k} - \nu_{k+1}\end{aligned}\tag{10}$$

$\{\nu_k\}$ と $\{\varepsilon_k\}$ との作り方より

$$\varphi(a) = \frac{1}{\nu_1 + \varepsilon_1} = \frac{1}{\nu_1 + \frac{1}{\nu_2 + \varepsilon_2}} = \frac{1}{\nu_1 + \frac{1}{\nu_2 + \frac{1}{\nu_3 + \varepsilon_3}}} = \dots\tag{11}$$

である。さてここで

$$\nu_k = \alpha_k \quad (k=1, 2, \dots)\tag{12}$$

の成立を数学的帰納法により証明しよう。

$\{\alpha_k\}$ から(2)によって作った無限列を $\{\xi_k\}$ とする。(9)より

$$\begin{aligned}\xi_2 &= \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2}} < \varphi(a) < \frac{1}{\alpha_1} = \xi_1 \\ \alpha_1 + 1 &\geq \alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2} > \frac{1}{\varphi(a)} > \alpha_1\end{aligned}$$

したがって、

$$\nu_1 = \alpha_1$$

である。

$$\nu_1 = \alpha_1, \quad \nu_2 = \alpha_2, \quad \dots, \quad \nu_k = \alpha_k$$

の成立を仮定するとき、

a) k が奇数ならば(9)より

$$\begin{aligned}\xi_{k+1} &= \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{\alpha_k + \frac{1}{\alpha_{k+1}}}}} < \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{\alpha_k + \frac{1}{\alpha_{k+1} + \varepsilon_k}}}}} = \varphi(a)\end{aligned}$$

この不等式の両辺の逆数をとり、 α_1 を引けば

$$\frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{\alpha_k + \frac{1}{\alpha_{k+1}}}}} > \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{\alpha_k + \varepsilon_k}}}$$

この操作 (*) を k (奇数) 回続ければ

$$\frac{1}{\alpha_{k+1}} > \varepsilon_k, \quad \alpha_{k+1} < \frac{1}{\varepsilon_k}$$

が得られ、 ν_{k+1} の作り方より

$$\alpha_{k+1} \leq \nu_{k+1}$$

である。また一方

$$\varphi(a) = \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{\alpha_k + \varepsilon_k}}}} < \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{\alpha_{k+1} + \frac{1}{\alpha_{k+2}}}}}} = \xi_{k+2}$$

に対し、前述の操作 (*) を k (奇数) 回施せば

$$\varepsilon_k > \frac{1}{\alpha_{k+1} + \frac{1}{\alpha_{k+2}}} > \frac{1}{\alpha_{k+1} + 1}, \quad \frac{1}{\varepsilon_k} < \alpha_{k+1} + 1$$

が得られ、 ν_{k+1} の作り方から

$$\nu_{k+1} \leq \alpha_{k+1}$$

が得られる。故に

$$\nu_{k+1} = \alpha_{k+1}$$

である。

b) k が偶数のときにも a) における方法は同じように適用され、 $\nu_{k+1} = \alpha_{k+1}$ が得られる。

したがって (12) は成立する。

つぎに、

iv) $\varphi(a)$ は $(0, 1)$ に含まれる無理数であることを証明する。

$0 < \varphi(a) < 1$ は明らかであるが、もし、 $\varphi(a)$ が有理数であるとするならば、(10) における ε_k はことごとく有理数である。したがって、

$$\varepsilon_k = \frac{f_k}{g_k} \quad (f_k, g_k \text{ は自然数}) \quad (k=1, 2, \dots)$$

を既約分数とすれば、

$$\frac{1}{\varepsilon_k} = \nu_{k+1} + \frac{f_{k+1}}{g_{k+1}} = \alpha_{k+1} + \frac{f_{k+1}}{g_{k+1}} = \frac{g_k}{f_k}$$

$$g_k = \alpha_{k+1} f_k + \frac{f_k f_{k+1}}{g_{k+1}}$$

f_{k+1} と g_{k+1} とは共通因数をもたないから, f_k は g_{k+1} の倍数である。したがって,

$$g_k \geq f_k \geq g_{k+1}$$

ここで常に等号が成立しないとすれば

$$g_1 > g_2 > \dots$$

となり不合理である。ゆえに適当な k_0 に対して,

$$g_{k_0} = f_{k_0} = g_{k_0+1}, \quad \varepsilon_{k_0} = 1$$

となる。したがって (12) より

$$\alpha_{k_0+1} = \nu_{k_0+1} = \text{Max } \{\nu : \nu < \varepsilon_{k_0} (=1), \nu \text{ は整数}\} = 0$$

となるが α_{k_0+1} は自然数であるから 0 ではない。故に $\varphi(a)$ は有理数ではなく無理数である。

v) $0 < \alpha < 1$ なる任意の無理数 α に対して, α に収束する無限連分数が存在することは, つぎのようにして証明される。

(10)において, $\varphi(a)$ を α に代えて, 整数の無限列 $\{\nu_k\}$ と正数の無限列 $\{\varepsilon_k\}$ を作ることができる。このとき ε_k はことごとく $(0, 1)$ に含まれる無理数になるから, $\{\nu_k\}$ は自然数の無限列となる。 $\{\nu_k\}$ から (2) によって作った無限列を $\{\xi_k\}$ とする。不等式

$$\nu_k < \nu_k + \varepsilon_k$$

の両辺の逆数をとり ν_{k-1} を加えれば,

$$\nu_{k-1} + \frac{1}{\nu_k} > \nu_{k-1} + \frac{1}{\nu_k + \varepsilon_k}$$

k が奇数のとき, この操作を $k-1$ (偶数) 回続ければ

$$\begin{aligned} \nu_1 + \frac{1}{\nu_2 + \frac{1}{\nu_3 + \frac{1}{\nu_4 + \dots}}} &< \nu_1 + \frac{1}{\nu_2 + \frac{1}{\nu_3 + \frac{1}{\nu_4 + \dots}}} \\ &\quad \vdots \\ \nu_{k-1} + \frac{1}{\nu_k} &< \nu_{k-1} + \frac{1}{\nu_k + \varepsilon_k} \end{aligned}$$

したがって, 両辺の逆数をとれば

$$\begin{aligned} \xi_k > \frac{1}{\nu_1 + \frac{1}{\nu_2 + \frac{1}{\nu_3 + \dots}}} &= \alpha \\ &\quad \vdots \\ \nu_{k-1} + \frac{1}{\nu_k} &< \nu_{k-1} + \frac{1}{\nu_k + \varepsilon_k} \end{aligned}$$

また k が偶数のときにも、上述と同じ方法で今度は $\xi_k < \alpha$ が得られる。ゆえに (9) により

$$\xi_2 < \xi_4 < \cdots < \alpha < \cdots < \xi_3 < \xi_1$$

となり $\{\xi_k\}$ の収束は iii) で示されているから

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k = \alpha$$

は明らかである。

3. S と R の位相同型

iv) で示したように

$S \ni a$ に対し $\varphi(a) \in R$ である。

また (12) により

$S \ni a, b, \varphi(a) = \varphi(b)$ ならば $a = b$ である。

v) によれば

$R \ni \alpha$ に対し、 $\alpha = \varphi(a)$ なる $a \in S$ が存在する。

したがって

vi) φ は S と R の間に一対一対応を与えていた。

vii) φ は S の上で一様連続である。

なぜならば、任意の正数 ε に対し、 $1/k_0(k_0 - 1) < \varepsilon/3$ を満足する自然数 k_0 をとり、 $0 < \delta < 1/k_0$ なる δ を定めれば

$$S \ni a, b, \quad a = \{\alpha_k\}, \quad b = \{\beta_k\}, \quad d(a, b) < \delta$$

とするとき、

$$\alpha_1 = \beta_1, \quad \dots, \quad \alpha_{k_0} = \beta_{k_0}$$

がなりたち、 a, b に (2) によって対応する無限列を、それぞれ、 $\{\xi_{ak}\}, \{\xi_{bk}\}$ とおけば iii) および (8), (9) より

$$|\varphi(a) - \varphi(b)| \leq |\varphi(a) - \xi_{ak_0}| + |\xi_{ak_0} - \xi_{bk_0}| + |\xi_{bk_0} - \varphi(b)| < \varepsilon$$

である。

viii) φ^{-1} は R の上で連続であることはつぎのように証明される。

$\alpha_n \rightarrow \alpha$ ($n \rightarrow \infty$), $\alpha_n, \alpha \in R$ なる R の無限列 $\{\alpha_n\}$ に対し、

$$\varphi^{-1}(\alpha_n) = a_n = \{\mu_{nk}\}_k, \quad \varphi^{-1}(\alpha) = a = \{\kappa_k\}$$

とおき、 α_n, α から、(10) に示したようにして、それぞれ整数の無限列 $\{\nu_{nk}\}_k, \{\nu_k\}$ と正数の無限列 $\{\varepsilon_{nk}\}_k, \{\varepsilon_k\}$ を作る。(12) により、それぞれ、

$$\mu_{nk} = \nu_{nk}, \quad \kappa_k = \nu_k$$

である。 $\alpha_n, \alpha, \varepsilon_{nk}, \varepsilon_k$ 等がことごとく無理数であることに注意すれば、

$$\varepsilon_{nk} \rightarrow \varepsilon_k, \quad \mu_{nk} \rightarrow \kappa_k \quad (n \rightarrow \infty)$$

が得られるから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, a) = 0$ の成立は明らかである。ただし、 φ^{-1} は R の上で一様連続にはならない。

by Kiro Isobe

vi), vii), viii) をまとめれば、

(Received October 8, 1965)

ix) φ は R と S との間に位相同型対応を与えている。

(1965年10月9日)

Introduction

文 献

- [1] N. M. ヴィノグラードフ: 整数論入門. pp. 7-11, 共立全書.
- [2] 竹之内 勝: トポロジー. pp. 30-31, 広川書店.

considered about a mean value of a function over an interval $[a, b]$ in the interval $[a, b]$ and d be any subdivision by the interval $[a, b]$ into a finite number of subintervals, designating the subintervals by

$$d : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

we put

$$I_i = \{f(x) | x_i - x_{i-1} : x_{i-1} \leq x \leq x_i\},$$

$$S_d = \left\{ \sum_{i=1}^n \xi_i : \xi_i \in I_i \right\}.$$

every set S_d , if their intersection is composed of only single point, i.e., $\{ \sum_{i=1}^n \xi_i : \xi_i \in I_i \}$, then we shall call this point ξ the mean value of the function f over the interval $[a, b]$.

The norm of the division d is defined such that

$$|d| = \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i - x_{i-1}\}$$

put

$$S = \bigcap_{d \in D} \bigcup_{1 \leq i \leq n} S_d.$$

In this paper, we shall consider the following case that the set S is composed of single point.

Main Result

a bounded function $f(x)$ be Riemann integrable over an interval $[a, b]$ and d a division of $[a, b]$. For any division d of the interval $[a, b]$, given by

$$d : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

$$G_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x), \quad g_i = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x).$$

$$G_d = \sum_{i=1}^n G_i(x_i - x_{i-1}) \text{ and } g_d = \sum_{i=1}^n g_i(x_i - x_{i-1}).$$

it is well known that

(*) for any positive number ε , there exists some positive number δ such that