

# 無限遠において引張りを受ける弓形状出張りを 持つ帯板の写像関数について

追分重義

(昭和39年10月30日受理)

## Mapping Function for a Infinite Strip Subjected to Tension, with a Bowshaped Projection on its Finite Zone

by Shigeyoshi OIWAKE

### Abstract

To analyse plane stress numerically, one resorts to difference theorem, as a modern method, mostly using a digital calculator, a stress function derived from a fundamental function, or Muskhelishvili's method for complex boundary value problems. One cannot overlook the importance of the third one that can give solutions of more fidelity than others as reported. Difficulty lies, however, in the derivation of the mapping function to use in the complex plane for the stress boundary value problem.

This paper reports, how the mapping function can be derived to make clear the stress distribution about the bowshaped projection of a infinite strip under axial tension. Giving a functional consideration on, and applying Schwarz-Christoffel's theorem to, the smooth curve profiling the projection, laborious calculation was undertaken and the result is shown therein. It is recommended that one should retain the record of typical correspondence between the mapping function and the shape of plate, acquired in this way, so that one can readily apply it to solve the stress problem as a complex boundary value one.

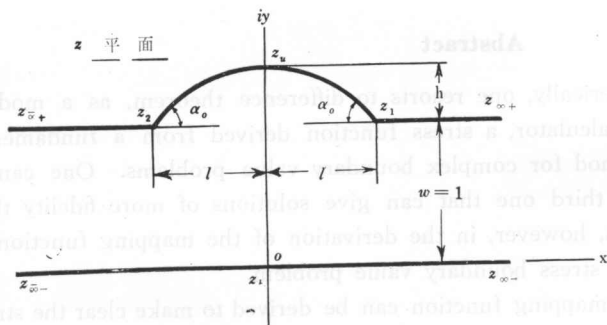
### 1. 緒 言

その一部位に他の部位とは不連続の縁曲線を持ち、その部位以外は一樣幅の帯板が無限遠で引張りを受けるときに、その部位に生ずる平面応力はこれまで数値解法としては、長方形、半円等の切欠き、出張り等に対して、基礎応力関数より縁条件を満足するように導かれた応力関数を使用したり<sup>1-2)</sup>、平板の形状を単位円に近似写像して、Muskhelishviliの複素境界値問題として解く等の方法が採られ<sup>3)</sup>、また近時はこの種の問題に限らないが、高速計数型計算機を使用しての差分理論による演算がしばしばおこなわれる。しかし厳密解が既知の問題について複素境界値解のほうが現用計算機解よりもより厳密解に近いことを示す報告も出ており<sup>4)</sup>、しかもいうまでもなく、その関連問題の理論の追究、構成のためにも複素境界値解は疎かにできない所以である。

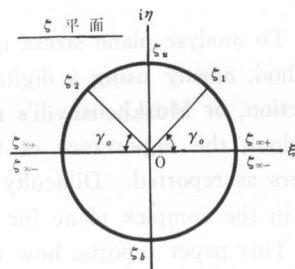
本論においては、任意の弓形状出張りを持つ無限帯の全輪廓に Schwarz-Christoffel の等角写像を適用して、これを単位円内に写像する関数を導き、出張りと同様幅の帯との間の相対寸法と位置を媒数とする写像関数の定型を、与えられた平板の外形に応じ得る様に、かねて準備しておき、この平板が外力を受けたときにこれを用いて速やかに応力計算に入るようにすることを示したい。

2. 写像関数の導出

無限帯の形状は第1図で、図形は  $y$  軸について対称である。いま  $z$  平面の無限帯の内部が第2図の  $\zeta$  平面の単位円の内部に写像され、接尾の同じな  $z$  subscript と  $\zeta$  subscript とを対応させると、 $z(\zeta)$  は  $\zeta = \zeta_{\pm\infty}$  に極があり、Schwarz-Christoffel の定理により<sup>5)</sup>,



第1図



第2図

$$\frac{z''(\zeta)}{z'(\zeta)} = \{\log z'(\zeta)\}' = - \sum_{\nu} \frac{\alpha_{\nu}}{\zeta - \zeta_{\nu}} \tag{1}$$

ただし、 $\nu = \infty, 1, 1 \rightarrow 2, 2, -\infty$  で、 $\pi\alpha_{\nu}$  は  $z$  平面の多角形の辺の反時計回りの順序による屈曲角であつて、 $z$  平面の各屈曲点、そこにおける屈曲角および  $\zeta$  平面の対応点の複素極座標表示を示すと第1表のようになるから、(1)式の最右辺の各2項について、

第1表

$z$ 平面の屈曲点	屈曲点における屈曲角/ $\pi$	$\zeta$ 平面の対応点
$z_{\infty}$	$\alpha_{\infty} = 1$	$+1$
$z_1$	$\alpha_1 = -\alpha_0$	$e^{i\gamma_0}$
$z_2$	$\alpha_2 = -\alpha_0$	$e^{i(\pi - \gamma_0)} = -e^{-i\gamma_0}$
$z_{-\infty}$	$\alpha_{-\infty} = 1$	$-1$

$$-\left(\frac{\alpha_{\infty}}{\zeta - \zeta_{\infty}} + \frac{\alpha_{-\infty}}{\zeta - \zeta_{-\infty}}\right) = -\left(\frac{1}{\zeta - 1} + \frac{1}{\zeta + 1}\right) \tag{2}$$

$$-\left(\frac{\alpha_1}{\zeta - \zeta_1} + \frac{\alpha_2}{\zeta - \zeta_2}\right) = \alpha_0 \left(\frac{1}{\zeta - e^{i\gamma_0}} + \frac{1}{\zeta + e^{-i\gamma_0}}\right) \tag{3}$$

$$-\sum_{i=1 \rightarrow 2} \frac{\alpha_i}{\zeta - \zeta_i} = \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \sum_{\alpha=1-\alpha_0}^{1+\alpha_0} \frac{\Delta\alpha}{\zeta - \zeta(\alpha)} = \int_{1-\alpha_0}^{1+\alpha_0} \frac{d\alpha}{\zeta - \zeta(\alpha)} \quad (4)$$

(4)式は(1)式の右辺の出張り縁に沿う成分で、この縁曲線に沿う反時計回りの進行を、微小角  $\Delta\alpha$  ずつの屈曲の総和で、 $\Delta\alpha$  を無限小にしたものと見做し、 $\alpha$  を測る基線は任意であるがここでは  $+\alpha$  方向とした。(4)式の最右辺の積分値を得るためには、まず  $\zeta(\alpha)$  の形を決めなければならぬ。いま  $\zeta$  平面において、 $\zeta(\alpha) = e^{if(\alpha)}$  とすると、

$$\left. \begin{aligned} \zeta_1 &= \zeta(1-\alpha_0) = e^{if(1-\alpha_0)} = e^{i\tau_0} \\ \zeta_u &= \zeta(1) = e^{if(1)} = e^{i\pi/2} \\ \zeta_2 &= \zeta(1+\alpha_0) = e^{if(1+\alpha_0)} = e^{i(\pi-\tau_0)} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

が成立つので、 $f(\alpha) \sim \alpha$  座標面では三点  $\zeta_1$ ,  $\zeta_u$  および  $\zeta_2$  が一直線上に並ぶことになり、その中間の諸点がはたしてこの直線に乗ってくるかどうかは不明であるが、 $z$  平面における対応点  $z_1$ ,  $z_u$  および  $z_2$  を結ぶ経路が連続であることにより、 $f(\alpha)$  は  $\alpha$  について線型であると仮定できるので、 $f(\alpha) = p\alpha + q$  とおき、(5)式により  $p$ ,  $q$  を定めると、結局、

$$\zeta(\alpha) = e^{(i/2\alpha_0)((\pi-2\tau_0)\alpha + (\pi\alpha_0 - \pi + 2\tau_0))} \quad (6)$$

となる。(6)式を(4)式の積分記号内に代入し、積分すると

$$-\sum_{i=1 \rightarrow 2} \frac{\alpha_i}{\zeta - \zeta_i} = \frac{-2i\alpha_0}{\pi - 2\tau_0} \frac{1}{\zeta} \log \frac{1 + e^{i\tau_0}\zeta}{1 - e^{-i\tau_0}\zeta} d\zeta \quad (7)$$

を得る。

(2), (3) および (7) 式を(1)式に代入して、両辺を  $\zeta$  について積分すると、

$$\begin{aligned} \log z'(\zeta) &= \log \frac{1}{1-\zeta^2} + \alpha_0 \int \left\{ \frac{-1}{e^{i\tau_0}(1-e^{-i\tau_0}\zeta)} + \frac{e^{i\tau_0}}{1+e^{i\tau_0}\zeta} \right\} d\zeta \\ &\quad - \frac{2i\alpha_0}{\pi-2\tau_0} \int \frac{1}{\zeta} \log \frac{1+e^{i\tau_0}\zeta}{1-e^{-i\tau_0}\zeta} d\zeta \end{aligned} \quad (8)$$

となり、第2項の積分結果は

$$2\alpha_0 \left( \zeta \cdot i \sin \tau_0 - \zeta^2 \cdot \frac{\cos 2\tau_0}{2} + \zeta^3 \cdot \frac{i \sin 3\tau_0}{3} - \zeta^4 \cdot \frac{\cos 4\tau_0}{4} + \dots \right)$$

で、また第3項の積分記号の中で、

$$\log \frac{1+e^{i\tau_0}\zeta}{1-e^{-i\tau_0}\zeta} = 2 \left( \zeta \cdot \cos \tau_0 - \zeta^2 \cdot \frac{i \sin 2\tau_0}{2} + \zeta^3 \cdot \frac{\cos 3\tau_0}{3} - \zeta^4 \cdot \frac{i \sin 4\tau_0}{4} + \dots \right)$$

であるから、これらを(8)式に代入し、第3項の積分をおこない、全体を整理すると、

$$\log z'(\zeta) = \log \frac{1}{1-\zeta^2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{1,n} \zeta^n + \text{const.} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} n \text{ が奇数のとき} \quad a_{1,n} &= i \cdot 2\alpha_0 \left\{ \frac{\sin n\tau_0}{n} - \frac{2 \cos n\tau_0}{n^2(\pi-2\tau_0)} \right\} \\ n \text{ が偶数のとき} \quad a_{1,n} &= -2\alpha_0 \left\{ \frac{\cos n\tau_0}{n} + \frac{2 \sin n\tau_0}{n^2(\pi-2\tau_0)} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (9a)$$

になるので、これより、

$$z'(\zeta) = \frac{C_1}{1-\zeta^2} e^{\sum_{n=1}^{\infty} a_{1,n} \zeta^n} \tag{10}$$

(10) 式の指数関数を  $\zeta$  の冪級数に展開すると、

$$e^{\sum_{n=1}^{\infty} a_{1,n} \zeta^n} = \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + a_{1,n} \zeta^n + \frac{a_{1,n}^2}{2} \zeta^{2n} + \frac{a_{1,n}^3}{3} \zeta^{3n} + \dots \right) \tag{11}$$

になり、数値計算では、与えられた  $\alpha_0$ 、設定した  $r_0$  で (9a) の  $a_{1n}$  を計算しておき、乗積計算は、まず第 1, 2 因数の積を求め、つぎにこの積に第 3 因数を乗ずるという順序におこなう。そうして各因数の項数も積の項数も、その係数が小数点以下適当位になるものまでとどめるときには、被積因数を増すにしたがって計算精度をいくらかでも高めることができる。このようにして結局 (11) 式は

$$z'(\zeta) = \frac{C_1}{1-\zeta^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_{2,n} \zeta^n \quad (a_{2,1} = 1) \tag{12}$$

となる。

つぎに無限遠  $z = z_{\infty}$  における  $z(\zeta)$  の挙動より積分定数  $C_1$  を定めることができる。第 1 図より、

$$z_{\infty+} - z_{\infty-} = \int_{z_{\infty-}}^{z_{\infty+}} dz = i$$

$z$  と  $\zeta$  の対応性と (12) 式とより、

$$\begin{aligned} \int_{z_{\infty-}}^{z_{\infty+}} dz &= \int_{\zeta_{\infty-}}^{\zeta_{\infty+}} \frac{C_1}{1-\zeta^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_{2,n} \zeta^n \\ &= \frac{C_1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} a_{2,n} \left( \int_{\zeta_{\infty-}}^{\zeta_{\infty+}} \frac{\zeta^n}{1+\zeta} d\zeta + \int_{\infty-}^{\infty+} \frac{\zeta^n}{1-\zeta} d\zeta \right) \end{aligned}$$

で、 $\zeta = \zeta_{\infty} = 1$  は  $z(\zeta)$  の極であるから、 $1 - \zeta = re^{i\theta}$  とおいて、積分回路を第 3 図の半円弧  $K$  とすると、

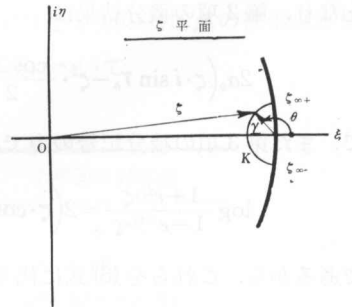
$$\begin{aligned} &= \frac{C_1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} a_{2,n} \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \int_{3\pi/2}^{\pi/2} \frac{(1-re^{i\theta})^n}{2-re^{i\theta}} (-ire^{i\theta}) d\theta \right. \\ &\quad \left. + \int_{3\pi/2}^{\pi/2} \frac{(1-re^{i\theta})^n}{re^{i\theta}} (-ire^{i\theta}) d\theta \right\} \end{aligned}$$

$n \geq 0$  であるから、 $\{ \}$  内の第一の積分は 0 となり、第 2 の積分は  $i\pi$  となるから、結局

$$i = \frac{i\pi C_1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} a_{2,n}$$

すなわち、

$$C_1 = \frac{1}{(\pi/2) \sum_{n=0}^{\infty} a_{2,n}} \tag{13}$$



第 3 図

になる。

つきに(12)式の両辺を積分すると、

$$z(\zeta) = C_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{3,n}}{n+1} \zeta^{n+1} + C_2 \tag{14}$$

$$\left. \begin{aligned} n \text{ が偶数のときは } a_{3,n} &= \sum_{0,2,4,\dots}^n a_{2,n} \\ n \text{ が奇数のときは } a_{3,n} &= \sum_{1,3,5,\dots}^n a_{2,n} \end{aligned} \right\} \tag{14a}$$

積分定数  $C_2$  は  $z$  図形の座標方向の位置，寸法によって定まる。

$$\left. \begin{aligned} 0 = z_b &= C_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{3,n}}{n+1} e^{i(n+1)(-\pi/2)} + C_2 \\ i(1+h) = z_{ii} &= C_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{3,n}}{n+1} e^{i(n+1)\pi/2} + C_2 \\ l+1 = z_1 &= C_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{3,n}}{n+1} e^{i(n+1)r_0} + C_2 \end{aligned} \right\} \tag{15}$$

第 2 表

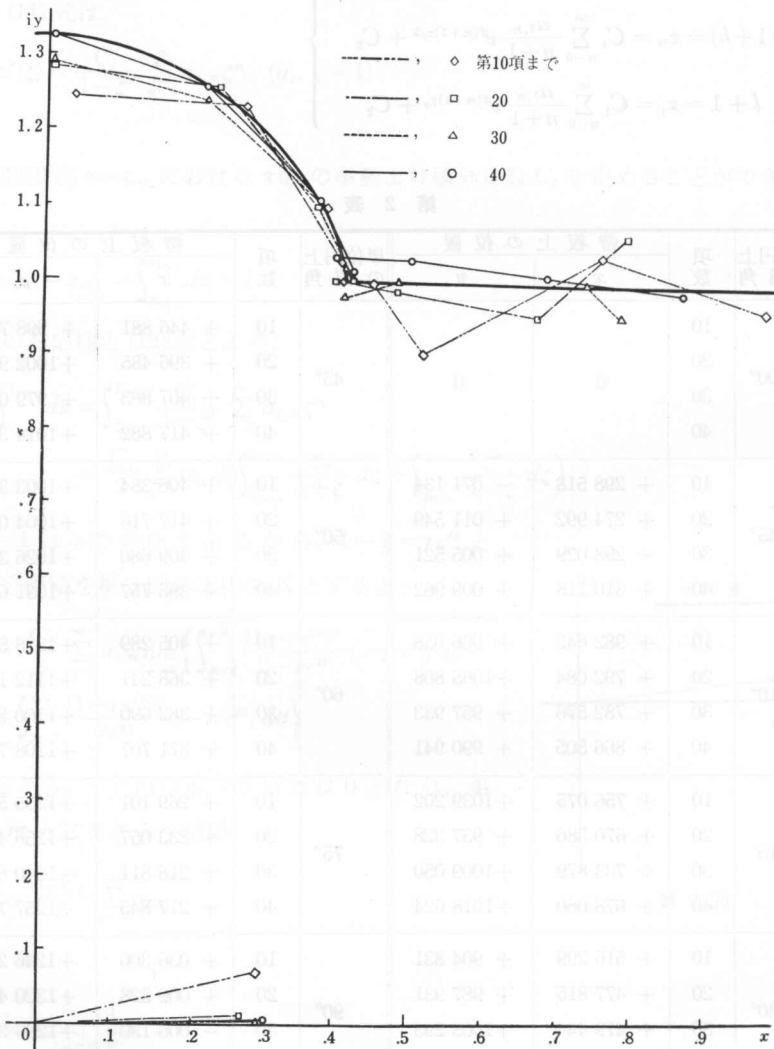
単位円上の 偏角	項 数	帯板上の位置		単位円上の 偏角	項 数	帯板上の位置	
		$x$	$y$			$x$	$y$
-90°	10	0	0	45°	10	+ 446 881	+ 998 704
	20				+ 396 485	+1002 963	
	30				+ 407 863	+ 979 076	
	40				+ 417 882	+1014 340	
-45°	10	+ 298 518	- 071 134	50°	10	+ 406 384	+1003 391
	20	+ 274 992	+ 011 549		20	+ 417 716	+1004 057
	30	+ 298 029	+ 005 521		30	+ 409 680	+1026 320
	40	+ 310 118	+ 009 962		40	+ 395 757	+1031 614
10°	10	+ 982 642	+ 966 058	60°	10	+ 405 289	+1028 814
	20	+ 792 084	+1065 808		20	+ 368 241	+1112 112
	30	+ 782 576	+ 957 933		30	+ 382 690	+1100 812
	40	+ 866 505	+ 990 941		40	+ 371 707	+1108 747
15°	10	+ 756 075	+1039 202	75°	10	+ 269 101	+1235 552
	20	+ 670 386	+ 957 328		20	+ 233 057	+1256 439
	30	+ 733 879	+1009 050		30	+ 218 811	+1240 659
	40	+ 678 080	+1018 624		40	+ 217 845	+1257 709
30°	10	+ 516 299	+ 904 831	90°	10	+ 036 300	+1246 261
	20	+ 477 815	+ 987 931		20	+ 009 828	+1320 415
	30	+ 479 444	+1003 293		30	- 006 130	+1286 291
	40	+ 496 339	+1029 855		40	- 009 053	+1325 605

第1式より  $C_2$  を求め、第2, 3式に代入すると  $l, h$  が求まる。

本来はいうまでもなく(15)の3式を連立させて、 $r_0$  を  $l, h$  の関数として求め、(14)式の写像関数を決定すべきであるが、不可能に近いので、実計算上は、与えられた弓形状の底角  $\pi\alpha_0$  と、単位円で仮定した  $\zeta_1$  の偏角  $r_0$  から  $a_{1,n}, a_{2,n}$  および  $a_{3,n}$  を順次に求めたのち、(15)式で  $l, h$  を求める手順を採る。すなわち第1図で帯板の形状係数  $w=1, l, h, \alpha_0$  を与えられたものとし、 $r_0$  を仮定して、帯板の諸元と(14)式の写像関数の対応表を作製しておけば、このような出張り付近の平面応力計算に容易に利用することができる。

### 3. 数 値 例

第2表および第4図は数値例の計算結果を示し、 $w=1, \alpha_0=90^\circ, r_0=45^\circ$  として、(14)



第4図

式によって、単位円上の数点に対応する $\approx$ 図形の座標を求め、 $l, h$ を含む値とともに記入および置点したものである。なおこの計算では(11)式右辺の $\zeta^n$ の係数は $10^{-6}$ 位までにとどめ、また(14)式では理論上 $n=\infty$ にすべきものを $n=10, 20, 30$ および $40$ まで計算したが、 $n$ が増す程精度が増すこと、ならびに、弓形状の底部の凹角付近の写像精度が、他より低いことがわかる。

#### 4. 結 言

応力解析において、光弾性法、電磁法等が能率的方法であることはいうまでもないが、理論構成上から軽視できない数値解析の能率をできるだけ高めるためには、等角写像の方法および利用化の研究が肝要である。数値例の写像で明らかのように、不連続縁の凹部で写像精度の落ちることは、応力集中の解析上難点であるが、この原因はここにおける写像関数の収斂が遅いため、隅肉を設ける等によりこの欠点を回避することができる。

本論において取扱った出張りは弓形状であって弓形ではないが、いうまでもなく弓形や半円はこの特別な場合である。また数値計算実行の難易はあるが、いくつかの弧状を結んでできる縁曲線を持つ不連続縁に対しても、本文中の関数 $f(\alpha)$ の型の選択を適切にし、微小極限の概念のもとに Schwarz-Christoffel の定理を適用すれば、(14)式に相当する写像関数が導出され同様の手順で写像関数と図形との対応定型を作ることができる。

#### 文 献

- 1) 石田 誠：機論，19 (1953) 5.
- 2) 渥美 光：機論，20 (1954) 699.
- 3) 野村恭雄：機論，25 (1959), 1075 ; 1084.
- 4) V. L. Piscane & L. E. Malvern : Trans. ASME, Sept, (1963), 410.
- 5) Z. Nehari : Conformal Mapping, McGraw-Hill, 1952, 192.