THE IEICE TRANSACTIONS ON FUNDAMENTALS OF ELECTRONICS, COMMUNICATIONS AND COMPUTER SCIENCES (JAPANESE EDITION)

EiC A 電子情報通信学会論文誌 基礎・境界

VOL. J101-A NO. 6
JUNE 2018

基礎・境界ソサイエティ
一般社団法人 電子情報通信学会
THE ENGINEERING SCIENCES SOCIETY
THE INSTITUTE OF ELECTRONICS, INFORMATION AND COMMUNICATION ENGINEERS

研究速報

一般的 2 自由度線形制御系における特性伝達関数行列によるロバストな定常特性の実現条件

榮坂　俊雄[†a)]（正員）

Conditions on Robust Steady-State Property for General Two-Degree-of-Freedom Linear Control Systems in Terms of Characteristic Transfer Functions

Toshio EISAKA[†a)], *Member*

[†] 北見工業大学工学部，北見市
Faculty of Engineering, Kitami Institute of Technology, 165 Koen-cho, Kitami-shi, 090–8507 Japan
a) E-mail: eisaka@cs.kitami-it.ac.jp

あらまし　一般的 2 自由度線形制御系においてロバストな定常特性を実現するために制御系全系及び制御器が満たすべき必要十分条件を，新たに特性伝達関数行列表現により定式化した．更にロバストな外乱漸近除去問題との関係や制御器の内部モデル構造について統合的に論じた．

キーワード　ロバスト定常特性，特性伝達関数，内部モデル原理，等価外乱

1. まえがき

制御系において，運用時の実制御対象が設計時に利用した公称モデルと異なっても，所期の制御特性が保存されることは実用上極めて重要である．この問題はロバスト制御と名づけられた分野で活発に研究されてきた [1]．これまで，着目する特性変動や保存すべき制御仕様に応じて設定された多様な課題に関して様々な解析・設計手法及び計算ツールが提案されている [2]．このうち，制御対象の特性変動に対し制御量の定常値が不感であることは制御系が満たすべき最も基本的な性質の一つである．この性質はロバストな定常特性と呼ばれ，その実現条件は内部モデル原理 [3] と関連づけられ，既約分解表現及び状態方程式を用いて定式化されている [4], [5]．一方，線形システムの表現方法としてこれらとは別に特性伝達関数行列 [6] があり，この表現の特徴を活かした総合的制御系設計の枠組みも提案されている [7]～[9]．

本論文ではロバストな定常特性を実現するために，一般的 2 自由度線形制御系及び制御器が満たすべき必要十分条件を，等価外乱 [10] に関する特性伝達関数行列により新たに定式化する．本定式化では，目標値に対するロバスト定常特性実現問題と外乱に対するロバスト漸近除去問題の関係が統一的に表現され，更に制御器がもつべき内部モデルの構造も明確に示される．

2. 準　　備

本章では考察の対象となるシステム並びに次章で用いる用語と記号法を示す．はじめに本論文で考察する線形フィードバック制御系の一般的構成を図 1 に示す．

ここで各信号の意味は，$r(m)$：目標値，$q(k)$：外乱，$u(m)$：操作量，$y^*(m+l)$：観測量であり，観測量は制御量 $y(m)$ と制御量以外の観測量 $\bar{y}(l)$ からなる．括弧内は各信号ベクトルの次元である．また添え字を二つもつ記号：W_{ab}, C_{ab}, P_{ab} は，それぞれ閉ループ系，制御器，制御対象に関する，入力信号ベクトル a から出力信号ベクトル b までの特性伝達関数行列を意味する．ここで特性伝達関数行列とはシステムの状態係数行列 A に対する特性多項式 $\det(s\mathrm{I}-A)$ を共通分母多項式とする共通分母型伝達関数行列である．C_{ab} と P_{ab} の特性多項式をそれぞれ d_c，d_p と記す．なお，図 1 の Plant は公称モデルと実制御対象の両者を考慮する．後者の場合，W_{ab}, P_{ab} 及び u, y^* の上部に波線符号を付けて前者の場合と区別する．また本論文では線形制御系を考察の対象とし，実制御対象も線形システムであると仮定する．

次に本論文で重要な概念である等価外乱を紹介する．等価外乱は，制御系に対する制御対象変動による影響を，外乱による影響に置き換えて表現するものであり，類似の概念は幾つか提案されているが，ここでは最も一般的で設計の自由度との関係が明確な文献 [10] の定義を採用する．図 1 において制御対象が実制御対象である制御系に目標値 r と外乱 q が加えられたときの実観測量 $\tilde{y}^*$ は，実操作量 $\tilde{u}$ 及び仮想入力信号 e_u, e_{y^*} を用いて式 (1) のように表現可能である．

$$\begin{aligned}\tilde{y}^* &= \tilde{P}_{uy^*}\tilde{u} + \tilde{P}_{qy^*}q = P_{uy^*}u + P_{qy^*}q + e_{y^*}\\ &= P_{uy^*}(\tilde{u}+e_u) + P_{qy^*}q + e_{y^*} \qquad (1)\end{aligned}$$

ここで e_u, e_{y^*} はそれぞれ，公称モデルによる制御系の操作量 u と観測量 y^* を再現した上で実制御対象による制御系の信号を等価的に算出することから等価外乱と呼ばれる．図 2 は，図 1 において制御対象が実制御対象の場合の操作量 $\tilde{u}$ と観測量 $\tilde{y}^*$ を，公称モデル

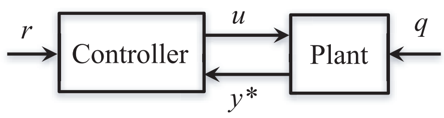

図 1　一般的フィードバック構成図
Fig. 1　General feedback control scheme.

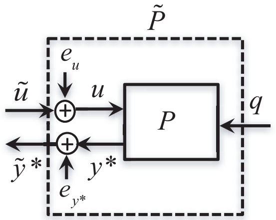

図 2　実制御対象及びその公称モデルと等価外乱
Fig. 2　Real plant replaced by its nominal model with equivalent disturbances.

と等価外乱を用いて表すことで式 (1) の関係を図示したものである．

図 1，図 2 及び式 (1) より，等価外乱は下式のように算出される．

$$
\begin{aligned}
e_u = u - \tilde{u} = &\left(W_{ru} - \tilde{W}_{ru}\right) r \\
&+ \left(W_{qu} - \tilde{W}_{qu}\right) q
\end{aligned}
\tag{2}
$$

$$
\begin{aligned}
e_{y^*} = \tilde{y}^* - y^* = &\left(\tilde{W}_{ry^*} - W_{ry^*}\right) r \\
&+ \left(\tilde{W}_{qy^*} - W_{qy^*}\right) q
\end{aligned}
\tag{3}
$$

目標値 r 及び外乱 q の信号発生器ラプラス変換モデルの不安定分母多項式をそれぞれ d_r 及び d_q と表記すると，上式に含まれる特性伝達関数行列が安定であれば，e_u 及び e_{y^*} の信号発生器ラプラス変換モデルの不安定分母多項式は，いずれも高々d_r と d_q である．

次章では等価外乱 e_{y^*} に関して，制御量に加わる等価外乱 e_y とそれ以外の観測量に加わる等価外乱 $e_{\bar{y}}$ を区別し，e_u を含めた 3 種類の等価外乱から制御量までの閉ループ系の特性伝達関数行列 $W_{e_u y}, W_{e_y y}, W_{e_{\bar{y}} y}$ を考慮する．

3. ロバストな定常特性の実現条件

以下ではまず本論文で議論するロバスト特性を定義する．

[定義]　図 1 の線形制御系において目標値に対する制御量の定常値が，閉ループ系の安定性を保存する範囲の制御対象の特性変動によって不変であるとき，制御系はロバストな定常特性をもつという(注1)．同様に，図 1 の線形制御系において閉ループ系の安定性を保存する範囲の制御対象の特性変動にかかわらず，外乱に対する制御量の定常値が 0 であるとき，制御系はロバストな外乱漸近除去特性をもつという．

(注1)：定常偏差が 0 であることは要件としていないが容易に追加できる．

次にロバストな定常特性実現のために制御系が満たすべき条件を示す．

[定理 1]　図 1 に示す安定な線形制御系がロバストな定常特性をもつために，閉ループ系の特性伝達関数行列が満たすべき必要十分条件は，$W_{e_y y}$ の分子多項式行列の 0 以外の全要素が d_r を因子として含むことである．

〈証明〉　等価外乱の定義より，制御対象が変動した制御系において，目標値 r が印加された場合の制御量 $\tilde{y}$ のラプラス変換表現は等価外乱 $e_u, e_y, e_{\bar{y}}$ を用いて次のように記述される．

$$
\tilde{y} = W_{ry} r + W_{e_u y} e_u + W_{e_y y} e_y + W_{e_{\bar{y}} y} e_{\bar{y}} \tag{4}
$$

ロバストな定常特性の実現条件は式 (4) 右辺第 2 項以下の逆ラプラス変換信号が全て漸近的に 0 となることである．外乱 q を考慮しない場合，式 (2), (3) より，$e_u, e_y, e_{\bar{y}}$ の各信号発生器ラプラス変換モデルの不安定分母多項式は高々d_r である．したがってロバストな定常特性をもつための必要十分条件は，$W_{e_u y}, W_{e_y y}, W_{e_{\bar{y}} y}$ の分子多項式行列の 0 以外の全要素が d_r を因子として含むことである．

$W_{e_u y}, W_{e_y y}, W_{e_{\bar{y}} y}$ は従属関係があるため，この条件は簡略化できる可能性がある．式 (4) において $W_{e_y y}$ は，よく知られた部分行列の行列式に関する公式を利用すると以下のように算出，変形できる．

$$
\begin{aligned}
W_{e_y y} &= \mathrm{I}_m + P_{uy}(\mathrm{I}_m - C_{y^* u} P_{uy^*})^{-1} C_{yu} \\
&= \{\mathrm{I}_m - P_{uy}(\mathrm{I}_m - C_{\bar{y}u} P_{u\bar{y}})^{-1} C_{yu}\}^{-1}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

ここで I_m は m 次の単位行列である．また $P_{uy^*} = \begin{bmatrix} n_{uy}^T & n_{u\bar{y}}^T \end{bmatrix}^T / d_p$, $C_{y^* u} = [Y_1 \quad Y_2]/d_c$ と表記し，逆行列の計算に文献 [6] 補題 3 の結果を用いると，$W_{e_y y}$ の分子多項式行列 $N_{e_y y}$ は次のように記述できる．

$m = 1$ のとき

$$
N_{e_y y} = d_c d_p - Y_2 n_{u\bar{y}} \tag{6}
$$

$m \geq 2$ のとき

$$
\begin{aligned}
N_{e_y y} = &\ \mathrm{adj}\left[\left\{\mathrm{I}_m \det\left(d_c d_p \mathrm{I}_m - Y_2 n_{u\bar{y}}\right) - \right.\right. \\
&\left.\left. n_{uy}\, \mathrm{adj}\left(d_c d_p \mathrm{I}_m - Y_2 n_{u\bar{y}}\right) Y_1\right\} / (d_c d_p)^{m-1}\right] / \\
&\left[\det\left(d_c d_p \mathrm{I}_m - Y_2 n_{u\bar{y}}\right) / (d_c d_p)^{m-1}\right]^{m-2}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

同様に $W_{e_{\bar{y}} y}$ 及びその分子多項式行列 $N_{e_{\bar{y}} y}$ は以下のように記述できる．

$$W_{e_{\bar{y}}y} = P_{uy}(\mathrm{I}_m - C_{y^*u}P_{uy^*})^{-1}C_{\bar{y}u}$$
$$N_{e_{\bar{y}}y} = n_{uy}\,\mathrm{adj}\,[d_c d_p \mathrm{I}_m - Y_1 n_{uy} - Y_2 n_{u\bar{y}}]\,Y_2/ (d_c d_p)^{m-1} \tag{8}$$

更に W_{e_uy} 及びその分子多項式行列 N_{e_uy} は以下のように算出できる．

$$W_{e_uy} = P_{uy}(\mathrm{I}_m - C_{y^*u}P_{uy^*})^{-1}$$
$$N_{e_uy} = n_{uy}\,\mathrm{adj}\,[d_c d_p \mathrm{I}_m - Y_1 n_{uy} - Y_2 n_{u\bar{y}}]\,d_c/ (d_c d_p)^{m-1} \tag{9}$$

式 (7)～(9) は，いずれも見かけ上の分母多項式が分子多項式行列の各要素でキャンセルされ，全て多項式行列である．

さて式 (6), (7) より制御対象の特性変動によらず N_{e_yy} の 0 以外の全要素が d_r を因子として含むための必要十分条件は，d_c 及び Y_2 の 0 以外の全ての要素が d_r^m を因子として含み，Y_1 の 0 以外の全ての要素が d_r^{m-1} を因子として含むことである．また式 (8), (9) よりこれらの条件は $N_{e_{\bar{y}}y}$ 及び N_{e_uy} の 0 以外の全ての要素が d_r を因子として含むための十分条件である．以上により，最終的に定理の条件の必要十分性が導かれる．証明終

定理 1 の証明で示されたように，定理 1 の W_{e_yy} への条件は定理 2 に示すように制御器のパラメータに対する条件に置き換えることが可能である．

[定理 2] 図 1 に示す安定な線形制御系がロバストな定常特性をもつために，フィードバック制御器の特性伝達関数行列 $C_{y^*u} = [Y_1\ Y_2]/d_c$ が満たすべき必要十分条件は，d_c 及び Y_2 の 0 以外の全ての要素が d_r^m を因子として含み，Y_1 の 0 以外の全ての要素が d_r^{m-1} を因子として含むことである(注2)．

定理 1 は実システム制御系の制御量が，等価外乱を導入することによって公称モデル制御系によって表現できることを利用し，ロバスト定常特性の実現条件を制御量に加わる外乱に対する漸近除去条件に帰着させた．また本論文で定義したロバスト定常特性においては，制御対象の固有構造は存在せず，したがって利用しないことを前提としている．定理 2 はこのとき，制御器のみで内部モデルが構成されること，更に，その包含構造が，制御量フィードバック信号ごとに目標値信号発生器モデルを内部モデルとして含み，かつこれらの内部モデルが制御量以外の観測量からは不可制御であることを示している．以上の結果に関連して最後にロバストな外乱漸近除去特性の実現条件を示す．

[定理 3] 図 1 に示す安定な線形制御系がロバストな外乱漸近除去特性をもつために閉ループ系の特性伝達関数表列が満たすべき必要十分条件は，W_{e_yy} の分子多項式行列の 0 以外の全要素が d_q を因子として含むことである．

〈証明〉 図 1 に示す安定な実システム線形制御系に外乱 q が加えられたときの制御量 $\tilde{y}$ は式 (4) の導出と同様に，次のように記述される．

$$\tilde{y} = W_{qy}q + W_{e_uy}e_u + W_{e_yy}e_y + W_{e_{\bar{y}}y}e_{\bar{y}} \tag{10}$$

上式において任意の外乱 q から制御量 y までの閉ループ系の特性伝達関数 W_{qy} は $W_{e_{y^*}y}$ を用いて次のように記述できる．

$$\begin{aligned} W_{qy} &= P_{qy} + W_{e_{y^*}y}P_{qy^*} \\ &= \Big([\mathrm{I}_m \quad 0_{m\times l}] + W_{e_{y^*}y}\Big)P_{qy^*} \\ &= \big[W_{e_yy}\ W_{e_{\bar{y}}y}\big]P_{qy^*} \end{aligned} \tag{11}$$

目標値 r を考慮しない場合，式 (2), (3) より，$e_u, e_y, e_{\bar{y}}$ の各信号発生器ラプラス変換モデルの不安定分母多項式は高々d_q である．式 (10), (11) から，図 1 の制御系に外乱 q が加えられたとき，制御量 $\tilde{y}$ の定常値が 0 となるための必要十分条件は $W_{e_uy}, W_{e_yy}, W_{e_{\bar{y}}y}$ の分子多項式行列の 0 以外の全要素が d_q を因子として含むことである．更にこの条件は定理 1 の証明と同様に，定理 3 の条件に帰着される．

4. む す び

本論文では一般的 2 自由度線形制御系において，閉ループ系の安定性を保存する範囲の制御対象の特性変動に対して制御量の定常値が不感であるために閉ループ系及び制御器が満たすべき必要十分条件を示した．これらの条件は従来の結果とは異なり，等価外乱を導入し，特性伝達関数行列表現を用いたことにより得られた以下に示す統合的な知見である．

1. 線形制御系におけるロバストな定常特性及びロバストな外乱漸近除去特性の実現が，いずれも制御量に加わる外乱に対する漸近除去条件に帰着された．ここで外乱は，ロバストな定常特性に関しては目標値，ロバストな外乱漸近除去特性に関しては当該外乱の各外部信号発生器から発生した信号

(注2)：d_c，Y_1，Y_2 の 0 以外の全ての要素が d_r^m を因子として含む場合は，定理 2 に示した必要十分条件を満たすが，制御器自体で不安定極零キャンセルを生じ，閉ループ系が内部不安定となる．したがって前提である「安定な線形制御系」に反し，ロバストな定常特性をもたない．

である．

2. 更に，上記の条件が，各外部信号発生器に関する内部モデル包含構造を直接示す制御器要件と等価であることを明らかにした．

文　献

[1] 木村英紀，藤井隆雄，森　武宏，ロバスト制御，コロナ社，1994.

[2] 計測自動制御学会誌，リレー解説 “ロバスト制御の基礎から最先端まで,” 全 14 回，2003.

[3] B.A. Francis and W.M. Wonham, “The internal model principle for linear multivariable regulators,” J. Appl. Math. Optimization, vol.2, no.2, pp.170–194, 1975.

[4] M. Vidyasagar, Control system synthesis, MIT Press, Boston, 1985.

[5] 杉江俊治，原　辰次，小野俊郎，“2 自由度ロバスト・サーボ補償器のクラス—観測量と制御量が異なる場合,” 計測自動制御学会論文集，vol.22, no.10, pp.1007–1013, Oct. 1986.

[6] 榮坂俊雄，“特性伝達関数行列の必要十分条件,” 信学論（A），vol.J97-A, no.1, pp.53–55, Jan. 2014.

[7] R. Tagawa, “Dual model matching,” Selected Papers from the IFAC Symposium on Control System Design Method, A volume in IFAC Symposia Series, pp.83–88, 1991.

[8] 榮坂俊雄，“線形制御系における実現可能な特性伝達関数—1 入出力多観測量制御対象の場合,” 信学論（A），vol.J99-A, no.3, pp.159–162, March 2016.

[9] 榮坂俊雄，“線形制御系における実現可能な特性伝達関数行列—多入出力制御対象の場合,” 信学論（A），vol.J99-A, no.6, pp.222–225, June 2016.

[10] 田川遼三郎，“新しい「等価外乱」の定義とその応用,” 第 15 回 Dynamical System Theory シンポジウム資料，pp.37–42, Dec. 1992.

（平成 29 年 9 月 21 日受付，30 年 1 月 9 日再受付）